

## Un ejemplo de aplicación de teoría de grafos: navegación topológica de robots móviles

|   |  |
|---|--|
| Asignatura  | Matemáticas Discretas  |
| Semestre  | Cuarto semestre  |
| Tema relacionado  | FES Aragón, Ingeniería en Computación, Plan 2119<br>Unidad 4. TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES<br>4.1 Conceptos básicos y definiciones |
| Autores   | Arturo Rodríguez García<br>Castillo Flores Eliam Judá<br>Gonzalo Chávez Onofre<br>Mario Sosa Rodríguez                           |
| Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE106122 Casos prácticos de Inteligencia Artificial y Robótica para la enseñanza de Matemáticas Discretas en Ingeniería en Computación. |  |

Prerrequisito: Esta lectura requiere obligatoriamente que el alumno haya cubierto el tema 2.4 “Teoría de conjuntos” y el tema 2.5 “Relaciones y funciones”.

### **INTRODUCCIÓN**

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio son los grafos. Un grafo está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que unen parejas de vértices. Los grafos son útiles para modelar una gran cantidad de situaciones de la vida real. Por ejemplo, una red de transporte urbana se puede representar con un grafo: mediante nodos representamos las estaciones y mediante aristas representamos las conexiones entre estaciones que son vecinas inmediatas.



Figura 1

Sin título [Fotografía de mapa de estaciones]

Fuente: Enric Cruz López de Pexels (s.f.).

La lista de aplicaciones de la teoría de grafos es muy extensa. Entre ellas podemos mencionar su uso para el modelado de las distintas topologías de una red de computadoras, para el estudio de redes sociales y la interacción de sus usuarios, su importancia en la construcción de modelos de aprendizaje de máquina como las redes neuronales artificiales, etc. En este documento mostraremos un ejemplo concreto de aplicación de la teoría de grafos en el área de Inteligencia Artificial y Robótica: su uso en la navegación topológica para robots móviles.

## CONCEPTOS MATEMÁTICOS

### **Definición de grafo**

Un grafo es una dupla  $G = \langle V, A \rangle$ , en donde  $V$  es un conjunto no vacío de elementos denominados vértices y  $A$  es un conjunto de elementos denominados aristas. Una arista es una pareja de valores  $(v_1, v_2)$ , con  $v_1 \in V$  y  $v_2 \in V$  y corresponde a una conexión entre dichos vértices.

En este tema, es necesario siempre especificar si la pareja de valores  $(v_1, v_2)$  es un par ordenado o es un par no ordenado. Aunque en los dos casos se utiliza la misma notación, en caso de que se indique que es un par ordenado el orden de los elementos tiene importancia, ya que si  $v_1 \neq v_2$  entonces  $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ . En caso de ser un par no ordenado el orden en que se escriben los elementos no tiene importancia, por lo que  $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ .

Un grafo no dirigido es aquel en el que las aristas son pares no ordenados. En este caso, una arista  $(v_1, v_2)$  implica que existe una conexión entre el vértice  $v_1$  y el vértice  $v_2$ . Por ejemplo, sea  $G = \langle V, A \rangle$ , con  $V = \{a, b, c, d\}$  y  $A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, d)\}$ .

A continuación, se muestra la representación gráfica de  $G$ .

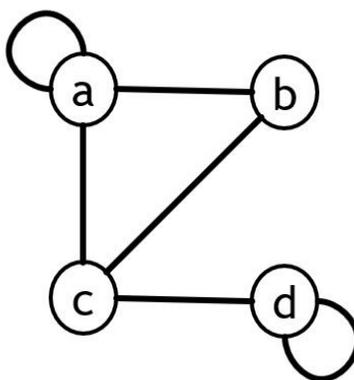


Figura 2

Representación gráfica un grafo no dirigido

Fuente: Elaboración propia

Una arista que conecta a un vértice consigo mismo se denomina lazo o bucle. En este ejemplo, las aristas  $(a, a)$  y  $(d, d)$  son bucles.

Un grafo dirigido es aquel en el que las aristas son pares ordenados. En este caso, una arista  $(v_1, v_2)$  se representa gráficamente como una flecha que sale de  $v_1$  y apunta a  $v_2$ . Por ejemplo, sea  $G = \langle V, A \rangle$ , con  $V = \{a, b, c, d\}$  y  $A = \{(a, a), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, d), (d, c)\}$ . A continuación, se muestra la representación gráfica de  $G$ .

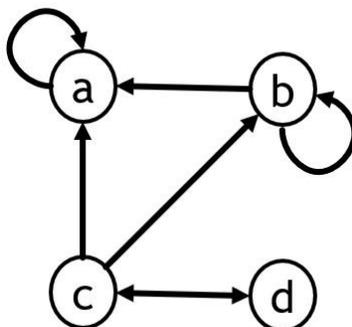


Figura 3

Representación gráfica un grafo dirigido

Fuente: Elaboración propia

En el caso de los grafos dirigidos, podemos ver que el conjunto de aristas es una relación sobre el conjunto de vértices, es decir  $A \subseteq V \times V$ . En este ejemplo, la flecha bidireccional entre los vértices  $c$  y  $d$  es resultado de las flechas correspondientes a las aristas  $(c, d)$  y  $(d, c)$ .

### **UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: NAVEGACIÓN TOPOLÓGICA DE ROBOTS MÓVILES**

De acuerdo con Russell y Norvig (2004: 1023-1024) los robots son “agentes físicos que realizan tareas mediante la manipulación física del mundo”, y que cuentan con sensores para percibir el entorno (por ejemplo: cámaras, termómetros, etc.) y con actuadores mediante los que transmiten fuerzas físicas al entorno (por ejemplo: ruedas con motor, pinzas de agarre, etc.). Estos autores clasifican a los robots en tres tipos: 1) manipuladores (aquellos que están anclados en un lugar fijo y que generalmente están asociados a tareas que involucran agarrar algo); 2) móviles (que tienen capacidad de desplazarse en su entorno) e 3) híbridos (robots móviles equipados con manipuladores).

En el caso de los robots móviles, la navegación autónoma es la capacidad de moverse en el entorno sin ser teleoperados a distancia por humanos, junto con todas las tareas y retos que involucra, incluyendo la capacidad de mantener actualizada la ubicación en que se encuentra, planear rutas óptimas para moverse de un punto a otro, resolver problemas de obstáculos imprevistos que aparecen en escenarios dinámicos, etc. Las aplicaciones de la navegación autónoma son muchas:

robots capaces de explorar otros planetas, robots repartidores de comida a domicilio, automóviles sin conductor, etc.



Figura 4

Robot Gris y Blanco

Fuente: Pixabay de Pexels (s.f.).

La navegación autónoma es un área de investigación muy grande, en la que existen muchas técnicas y algoritmos para resolver los complicados retos que se presentan. Pero entre todas las estrategias, hay una que está relacionada fuertemente con la teoría de grafos: la navegación topológica. En esta estrategia, la información espacial del ambiente se representa mediante un grafo. Por ejemplo, dado el plano de un cuarto de una casa, se podrían colocar algunos vértices que corresponden a puntos a los que el robot puede llegar, y mediante las aristas se conectan puntos cercanos entre los que el robot puede desplazarse de manera libre.

Por ejemplo, en la siguiente figura se presenta un diagrama de una recámara, en el que los muebles se representan mediante rectángulos azules, que corresponden a los obstáculos más significativos del ambiente para un robot móvil terrestre (por ejemplo, un robot aspirador). En el espacio accesible para el robot, se definieron algunos puntos de interés en el cuarto que serán los vértices del grafo. El criterio para elegir estos puntos puede ser por que corresponden a una ubicación estratégica, o porque se les puede asignar algún contenido semántico que sea de utilidad para tareas en las que se debe dar alguna instrucción al robot (por ejemplo: “Colócate al costado derecho del closet”, “Ponte en el pie de la cama”, “Enfrente del mueble de televisión”, etc.). De igual forma, se eligen algunas aristas para conectar vértices cercanos en el mapa, a las cuales se les puede asignar un peso asociado con el costo de desplazarse de un extremo al otro de la arista (por ejemplo, se puede usar como medida de costo el tiempo invertido en realizar dicha acción).

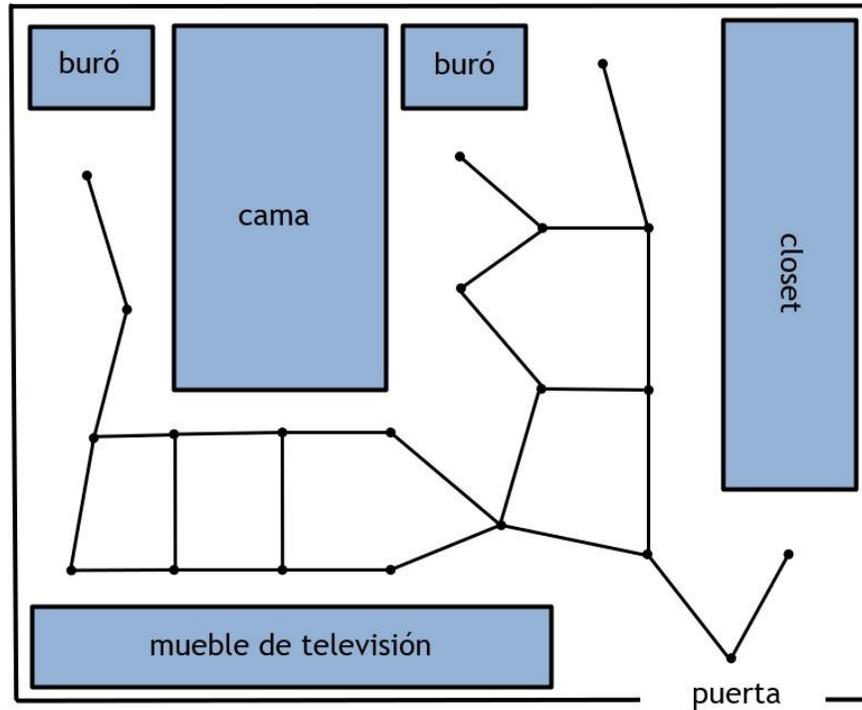


Figura 5

Ejemplo de mapa de navegación topológica

Fuente: Elaboración propia

De esta forma, el espacio de navegación accesible del robot se convierte en un grafo, el cual puede ser analizado con todos los conocimientos y algoritmos relacionados con teoría de grafos: determinar si hay forma de acceder desde un vértice a otro, encontrar la ruta más cercana entre dos vértices, encontrar un recorrido para visitar todos los vértices, etc.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En las siguientes preguntas, elige la respuesta correcta.

1.- De acuerdo con la definición de grafo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Un grafo puede tener cero vértices
- b) Un grafo debe tener por lo menos un vértice.
- c) Un grafo debe tener por lo menos una arista.
- d) Un grafo debe tener por lo menos un vértice y por lo menos una arista.

2.- ¿Cuál de las siguientes no es una característica de un grafo dirigido?

- a) Sus aristas son pares no ordenados
- b) Sus aristas son pares ordenados
- c) Las aristas se representan gráficamente como flechas
- d) El conjunto de aristas es una relación sobre el conjunto de vértices

3.- Sea un grafo no dirigido  $G = \langle V, A \rangle$ , con  $V = \{a, b, c, d, e\}$ . ¿Cuál de los siguientes no podría ser el conjunto de aristas de este grafo?

- a)  $A = \{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, d) \}$
- b)  $A = \{ (b, a), (c, a), (b, b), (c, d) \}$
- c)  $A = \{ \}$
- d)  $A = \{ (a, b), (a, c), (b, f), (c, d) \}$

## **REFERENCIAS**

DeSouza, G. N., & Kak, A. C. (2002). Vision for mobile robot navigation: A survey. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 24(2), 237-267.

Epp, Susanna S. (2011). *Matemáticas discretas con aplicaciones* (cuarta edición). CENGAGE Learning.

Gul, F., Rahiman, W., & Nazli Alhady, S. S. (2019). A comprehensive study for robot navigation techniques. *Cogent Engineering*, 6(1), 1632046.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas* (sexta edición). PEARSON Prentice Hall.

K. Konolige, E. Marder-Eppstein and B. Marthi. (2011). "Navigation in hybrid metric-topological maps," *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Shanghai, China, 2011, pp. 3041-3047.

Russell, Stuart y Norvig, Peter. (2004). *Inteligencia Artificial. Un Enfoque Moderno* (2ª Edición). PEARSON Prentice Hall.

Veerarajan, T. (2008). *Matemáticas Discretas con teoría de gráficas y combinatoria*. Mc Graw Hill.

## **REFERENCIAS DE LAS IMÁGENES**

Enric Cruz López de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de mapa de estaciones]. <https://www.pexels.com/es-es/foto/ciudad-persona-mano-calle-6642542/> Recuperado el 26 de mayo de 2023.

Pixabay de Pexels (s.f.). Robot Gris y Blanco. [Fotografía de robot explorador]. <https://www.pexels.com/es-es/foto/robot-gris-y-blanco-73910/> Recuperado el 26 de mayo de 2023.