Un ejemplo de aplicación de las relaciones matemáticas: representación del conocimiento

Asignatura	Matemáticas Discretas
Semestre	Cuarto semestre
Tema relacionado	FES Aragón, Ingeniería en Computación, Plan 2119 Unidad 2. SUCESIONES, RECURRENCIA, CONJUNTOS, RELACIONES, FUNCIONES E INDUCCIÓN MATEMÁTICA 2.5 Relaciones y funciones
Autores	Arturo Rodríguez García Castillo Flores Eliam Judá Gonzalo Chávez Onofre Mario Sosa Rodríguez
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE106122 Casos prácticos de Inteligencia Artificial y Robótica para la enseñanza de Matemáticas Discretas en Ingeniería en Computación.	

Prerrequisito: Esta lectura requiere obligatoriamente que el alumno haya cubierto el tema 1.6 “Fórmulas de predicados” y el tema 2.4 “Teoría de conjuntos”.

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más relevantes en la teoría de conjuntos es el de relación, mediante el cual podemos estudiar la forma en que interactúan o se vinculan los elementos de dos o más conjuntos. Por ejemplo, vamos a suponer que tenemos el conjunto de todas las lenguas oficiales del mundo:

$$A = \{\, albanés, alemán, \dots, malayo, moldavo, \dots, zamuco, zulú \,\}$$

Por otra parte, tenemos el conjunto de todos los países del mundo, cuya inicial estará en minúscula para respetar la convención de escritura de elementos de un conjunto:

$$B = \{\, afganistan, albania, \dots, mauritania, méxico, \dots, zambia, zimbabue\}$$

Figura 1

Sin título [Fotografía de mapa]

Fuente: Lara Jameson de Pexels (s.f.).

Suponga que queremos modelar la siguiente relación entre los elementos de ambos conjuntos:

$$a \text{ } es \text{ } lengua \text{ } oficial \text{ } de \text{ } b$$

Donde a es un elemento del conjunto de lenguas, y b es un elemento del conjunto de países. Esta relación es un conjunto de parejas ordenadas (a, b) que satisfacen la condición de que a es considerada una lengua oficial del país b. Algunos ejemplos de parejas ordenadas que forman parte de esta relación son:

$$(español, guatemala)$$

$$(español, nicaragua)$$

$$(español, méxico)$$

$$(francés, canadá)$$

$$(ingles, canadá)$$

Es importante notar que un mismo idioma puede ser lengua oficial de más de un país, como es el caso del español, que actualmente es la lengua oficial de más de 20 países. Por otra parte, también es posible que un país tenga más de un idioma oficial, como es el caso de Canadá, cuyos idiomas oficiales son el francés y el inglés.

Como vemos en este ejemplo, las relaciones nos permiten expresar conocimiento que tenemos acerca del mundo mediante el lenguaje de las matemáticas. Por esta razón, las relaciones tienen una gran cantidad de aplicaciones. Por ejemplo, son de gran relevancia en las bases de datos relacionales, en la representación del conocimiento, etc.

En este documento estudiaremos un ejemplo concreto de aplicación de las relaciones matemáticas: su rol dentro de una de las áreas de la Inteligencia Artificial denominada "Representación del conocimiento", en la que a través de lógica simbólica se representa el conocimiento que tiene un agente inteligente sobre el mundo en el que habita.

<u>CONCEPTOS MATEMÁTICOS</u>

Definición de relación

Sean A y B dos conjuntos. Una relación binaria R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Esto lo podemos escribir como: $R \subseteq A \times B$. Recordemos que el producto cartesiano se define como $A \times B = \{(a, b) | a \in A \ y \ b \in B\}$.

Veamos un ejemplo. Suponga que en una casa habita una familia de cuatro integrantes: la madre se llama Ana (a), el padre se llama Bruno (b), Carlos (c) es el hijo de 13 años y Delia (d) es la hija de 4 años. En la casa hay tres puertas que requieren llave: la puerta del garaje (g), la puerta de la entrada principal (p) y la puerta que lleva a la zotehuela (z). Nos interesa tener un registro de qué personas tienen una copia de la llave de cada una de las puertas.

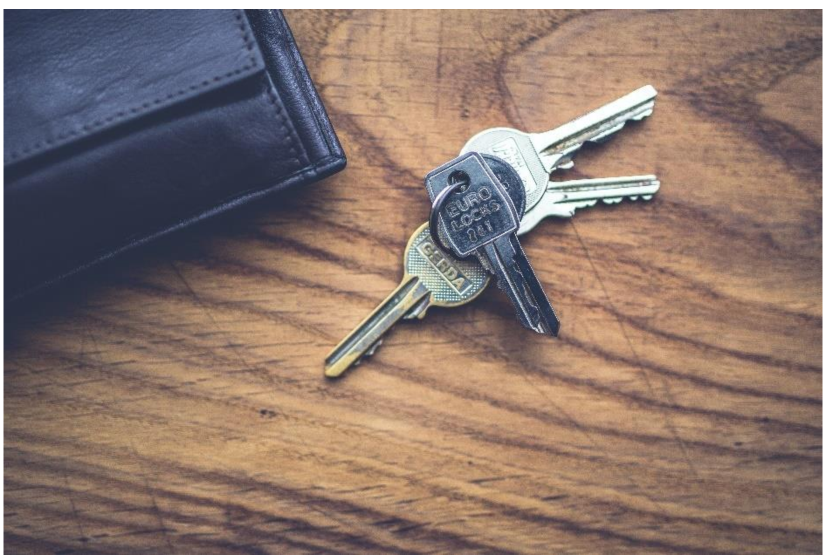

Figura 2

Sin título [Fotografía de llaves]

Fuente: Kaboompics.com de Pexels (s.f.).

En este caso, los conjuntos son:

$$A = \{x|x \ es \ un \ habitante \ de \ la \ casa\} = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{x|x \ es \ una \ puerta \ con \ cerradura\} = \{g, p, z\}$$

Definimos la relación $R = \{\ (a, b)|\ a \in A, b \in B, a \ tiene \ llave \ de \ b\}$. Al entrevistar a la familia, nos enteramos de que Carlos no tiene llave del garaje ya que no está en edad de utilizar el automóvil, Delia no tiene ninguna de las llaves debido a su edad y Bruno perdió recientemente la llave de la zotehuela. Con esta información podemos expresar por extensión al conjunto R de la siguiente forma:

$$R = \{\ (a, g)\ , (a, p)\ , (a, z)\ , (b, g)\ , (b, p)\ , (c, p), (c, z)\ \}$$

Notamos que R es un conjunto de parejas ordenas. En cada pareja ordenada el primer elemento corresponde a un habitante de la casa y el segundo elemento a una de las puertas con cerradura. Como ejemplo, $(b, g) \in R$, se refiere a que Bruno tiene llave del garaje. También podemos ver que $(c, g) \notin R$, ya que Carlos no tiene llave del garaje.

Como se mencionó previamente, una relación es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En este ejemplo, podríamos pensar que el producto cartesiano es el caso extremo en el que cada uno de los integrantes de la familia tiene copia de la llave de cada una de las puertas:

$$A \times B = \{\ (a, g), (a, p), (a, z), (b, g), (b, p), (b, z), (c, g), (c, p), (c, z), (d, g), (d, p), (d, z)\}$$

Representación gráfica de una relación

Una relación se puede representar gráficamente mediante diagramas sagitales. Estos consisten en dibujar ambos conjuntos con todos sus elementos. Si $(m, n) \in R$, procedemos a trazar una línea que une al elemento m con el elemento n. Como ejemplo, se presenta a continuación el diagrama sagital de la relación del caso de las llaves:

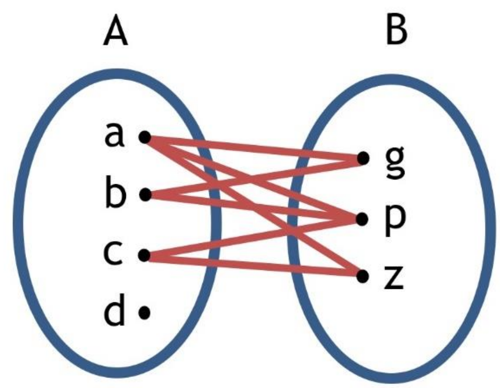

Figura 3

Representación de una relación binaria mediante un diagrama sagital

Fuente: Elaboración propia

Una segunda alternativa para representar gráficamente esta relación es mediante un sistema de ejes coordenados. En el eje horizontal representamos a los elementos del conjunto A y en el eje vertical a los elementos del conjunto B. Cada pareja $(m, n) \in R$ la representamos poniendo una marca en la coordenada (m, n). Usando de nuevo el caso de las llaves como ejemplo tenemos la siguiente gráfica:

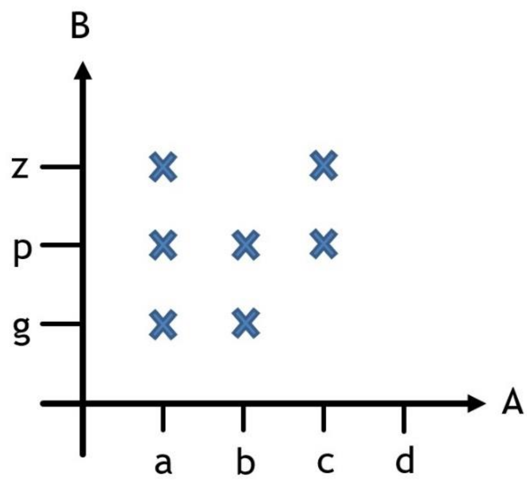

Figura 4

Representación de una relación binaria mediante un sistema de ejes coordenados

Fuente: Elaboración propia

Dominio y rango de una relación

Sea la relación $R \subseteq A \times B$. El dominio de R se define como:

$$Dominio(R) = \{ a \in A \mid \exists b \in B \ (a, b) \in R\}$$

Es decir, el dominio de una relación es un conjunto de elementos pertenecientes a A para los que existe por lo menos un elemento del conjunto B con el que forman una pareja ordenada (a, b) perteneciente a la relación.

Retomemos el ejemplo de las llaves, en el que $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{g, p, z\}$, y se tiene la relación $R = \{ (a, g) , (a, p) , (a, z) , (b, g) , (b, p) , (c, p), (c, z) \}$. En este caso, vemos que el elemento a del conjunto A forma por lo menos una pareja ordenada con elementos del otro conjunto. De hecho, lo hace exactamente con tres elementos del conjunto B, que son g, p y z. Por esta razón, el elemento a forma parte del dominio de R.

Al analizar los elementos b y c vemos que ambos también forman por lo menos una pareja ordenada con elementos del otro conjunto. Concretamente, b lo hace con g y con p, mientras que c lo hace con p y con z. Por esta razón, los elementos b y c también forman parte del dominio de R.

Finalmente, aunque d sea un elemento del conjunto A, vemos que no aparece como primer elemento de ninguna de las parejas ordenadas que forman parte de R. Por esta razón, d no forma parte del dominio de R. Concluyendo este ejemplo, $Dominio(R) = \{a, b, c\}$.

Sea la relación $R \subseteq A \times B$. El rango de R se define como:

$$Rango(R) = \{ \, b \in B \mid \exists a \in A \; (a, b) \in R \}$$

Es decir, el rango de una relación es un conjunto de elementos pertenecientes a B para los que existe por lo menos un elemento del conjunto A con el que forman una pareja ordenada (a, b) perteneciente a la relación.

Modificando ligeramente el ejemplo de las llaves, vamos a suponer que por alguna razón se perdieron todas las llaves del garaje. Entonces tendríamos que $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{g, p, z\}$, y la relación $R = \{ \, (a, p) \, , (a, z) \, , (b, p) \, , (c, p), (c, z) \, \}$. Tanto p como z aparecen por lo menos en una pareja ordenada, por lo que ambos forman parte del rango. Sin embargo, vemos que en esta ocasión g ya no aparece en ninguna de ellas, por lo que no forma parte del rango. Concluyendo este ejemplo, $Rango(R) = \{p, z\}$.

Para reforzar el entendimiento de los conceptos de dominio y rango veamos el diagrama sagital del último caso.

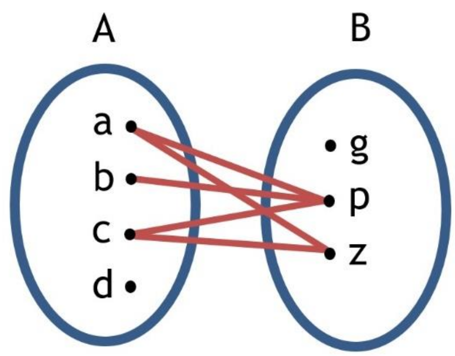

Figura 5

Diagrama sagital de la relación del ejemplo de las llaves

Fuente: Elaboración propia

El dominio está formado por aquellos elementos del conjunto A que están conectados por lo menos a un elemento del conjunto B. Ya que d no está conectado a ningún elemento del otro conjunto, entonces no forma parte del dominio.

Por otra parte, el rango está formado por aquellos elementos del conjunto B que están conectados por lo menos a un elemento del conjunto A. Ya que g no está conectado a ningún elemento del otro conjunto, entonces no forma parte del rango.

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Uno de los conceptos fundamentales en Inteligencia Artificial es el de agente inteligente. “Un agente es cualquier cosa capaz de percibir su medioambiente con la ayuda de sensores y actuar en ese medio” (Russell y Norvig ,2004:37). ¿Y cuándo decimos que un agente es inteligente?. “Un agente inteligente es un sistema que actúa inteligentemente: lo que hace es apropiado para sus circunstancias y su meta, es flexible a entornos cambiantes y metas cambiantes, aprende de la experiencia y toma decisiones apropiadas dadas limitaciones perceptuales y computación finita”(Poole, Mackworth y Goebel, 1998,:1)[1]. En la naturaleza podemos encontrar ejemplos de agentes inteligentes: humanos, perros, delfines, pulpos, etc. Uno de los objetivos de la Inteligencia Artificial es la construcción de agentes inteligentes, por ejemplo, un robot que cumpla con las características de la definición.

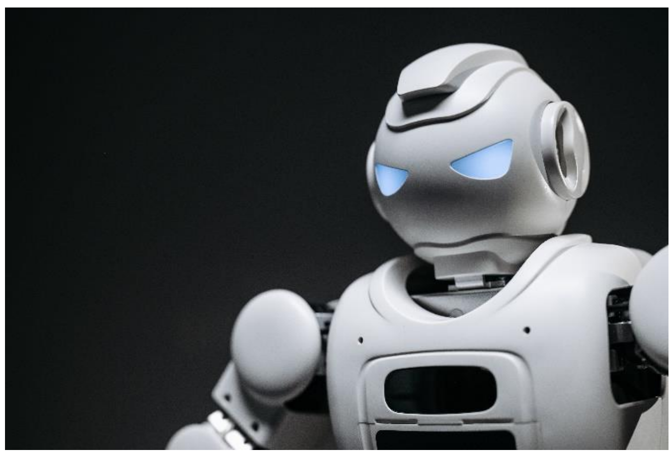

Figura 6

Sin título [Fotografía de robot]

Fuente: Pavel Danilyuk de Pexels (s.f.).

Los agentes inteligentes requieren conocimiento del entorno en el que habitan para resolver problemas y tomar decisiones. Si queremos construir un agente inteligente artificial, tenemos que dotarlo del conocimiento necesario para resolver las tareas que le encomendamos o debemos brindarle algún mecanismo para que sea capaz de adquirirlo por su cuenta. En el enfoque de la Inteligencia Artificial Simbólica, se recurre al uso de la lógica simbólica para expresar el conocimiento que posee un agente.

Los agentes basados en conocimiento “contienen el conocimiento en forma de sentencias mediante un lenguaje de representación del conocimiento, las cuales quedan almacenadas en una base de conocimiento” (Russell y Norvig ,2004:261). Como ejemplos de estos lenguajes de representación del conocimiento podemos mencionar a la lógica proposicional, a la lógica primer orden, etc.

[1] Traducción de la cita realizada por Arturo Rodríguez García.

Como ejemplo, vamos a suponer que se quiere construir un robot doméstico para que ayude en las tareas del hogar. Aunque falta mucho tiempo para que tengamos robots de servicio multitarea en nuestros hogares, a la fecha ya existen robots que pueden hacer tareas específicas como los robots aspiradores. Si queremos que un robot doméstico pueda realizar tareas complejas en el hogar, requiere tener conocimiento suficiente sobre su entorno: las habitaciones que lo conforman, el mobiliario, los habitantes, las reglas de convivencia, etc.

Figura 7

Sin título [Fotografía de robot aspirador]

Fuente: Kindel Media de Pexels (s.f.).

Vamos a suponer que queremos que un robot tenga conocimiento sobre la disposición de las habitaciones de una casa. Vamos a decir que una habitación está conectada con otra, si existe una puerta de acceso entre ellas que nos permite pasar de forma directa entre una y otra. A continuación, se muestra la disposición de las habitaciones de una casa que cuenta con un baño (b), una cocina (c), un garaje (g), un patio (p), una recámara (r) y una sala-comedor (s). En este diagrama, los huecos en los muros representan la presencia de una puerta.

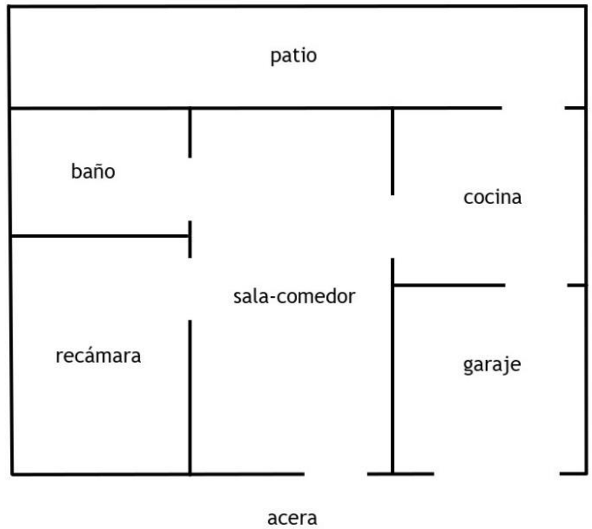

Figura 8

Diagrama de las habitaciones de una casa

Fuente: Elaboración propia

Sea $A = \{x|x\ es\ una\ habitación\ de\ la\ casa\} = \{b, c, g, p, r, s\}$. Sea $R \subseteq A \times A$ definida como $R = \{(a, b)|a \in A, b \in A, hay\ una\ puerta\ que\ conecta\ directamente\ a\ con\ b\}$, que podemos expresar por extensión como:

$$R = \{\ (b, s), (c, g), (c, p), (c, s), (g, c), (p, c), (r, s), (s, b), (s, c), (s, r)\ \}$$

En este caso, vemos que la relación se da del conjunto A consigo mismo. Cuando ocurre esto, se dice que es una relación sobre el conjunto A.

Aunque a primera vista parece redundante que cada una de las puertas es representada por dos parejas ordenadas, es importante que se enlisten ambas dentro de la relación. Por ejemplo, la puerta que conecta la cocina con el garaje genera las parejas ordenadas (c, g) y (g, c). Si omitiéramos la segunda de ellas, entonces estaríamos afirmando que no hay una puerta que conecta directamente el garaje con la cocina.

La siguiente cuestión es cómo podemos representar una relación binaria en un lenguaje de representación del conocimiento. Si estamos utilizando lógica de primer orden, podemos definir un predicado con dos argumentos $P(x, y): (x, y) \in R$. Para este ejemplo podemos definir el predicado $ConectadosPorPuerta(x, y)$, y usarlo para convertir cada pareja ordenada de R en una proposición dentro de la base de conocimiento:

$ConectadosPorPuerta(b, s)$

$ConectadosPorPuerta(c, g)$

$ConectadosPorPuerta(c, p)$

$ConectadosPorPuerta(c, s)$

$ConectadosPorPuerta(g, c)$

$ConectadosPorPuerta(p, c)$

$ConectadosPorPuerta(r, s)$

$ConectadosPorPuerta(s, b)$

$ConectadosPorPuerta(s, c)$

$ConectadosPorPuerta(s, r)$

Si le preguntamos a nuestro agente inteligente si se puede acceder directamente de la cocina al garaje, entonces consultará su base de conocimiento en busca de la afirmación $ConectadosPorPuerta(c, g)$ y nos regresará el valor de Verdadero. Por otra parte, si le preguntamos a nuestro agente inteligente si se puede acceder directamente de la cocina a la recámara, entonces consultará su base de conocimiento en busca de la afirmación $ConectadosPorPuerta(c, r)$ y nos regresará el valor de Falso.

En este ejemplo vemos cómo declarar hechos concretos en la base de conocimiento, pero el poder expresivo de la lógica de primer orden va muchos más allá, incluida la capacidad de utilizar las reglas de inferencia para realizar razonamiento lógico y obtener nuevo conocimiento de las conclusiones.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En las siguientes preguntes, elige la respuesta correcta.

1.- Sea $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f\}$. ¿Cuál de las siguientes es una relación $R \subseteq A \times B$?

a) $R = \{ (a, e), (a, f), (b, e), (b, f), (c, d), (c, f) \}$

b) $R = \{ (a, e), (a, f), (b, e), (b, f), (c, e), (c, f) \}$

c) $R = \{ (a, e), (a, f), (e, b), (b, f), (c, d), (c, f) \}$

d) $R = \{ (a, e), (a, f), (b, e), (b, g), (c, d), (c, f) \}$

2.- Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$. Sea $R = \{ (a, d), (a, f), (b, d), (b, f)\}$. ¿Cuál es el dominio de R?

a) $Dominio(R) = \{a, b, c\}$

b) $Dominio(R) = \{d, e, f\}$

c) $Dominio(R) = \{a, b\}$

d) $Dominio(R) = \{d, f\}$

3.- Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$. Sea $R = \{ (a, d), (a, f), (b, d), (b, f)\}$. ¿Cuál es el rango de R?

a) $Rango(R) = \{a, b, c\}$

b) $Rango(R) = \{d, e, f\}$

c) $Rango(R) = \{a, b\}$

d) $Rango(R) = \{d, f\}$

REFERENCIAS

Epp, Susanna S. (2011). *Matemáticas discretas con aplicaciones* (cuarta edición). CENGAGE Learning.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas* (sexta edición). PEARSON Prentice Hall.

Poole, D. I., Goebel, R. G., & Mackworth, A. K. (1998). *Computational Intelligence*. *A logical approach.* New York: Oxford University Press.

Russell, Stuart y Norvig, Peter. (2004). *Inteligencia Artificial. Un Enfoque Moderno* (2ª Edición). PEARSON Prentice Hall.

Veerarajan, T. (2008). *Matemáticas Discretas con teoría de gráficas y combinatoria*. Mc Graw Hill.

REFERENCIAS DE LAS IMÁGENES

Kaboompics.com de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de llaves]. https://www.pexels.com/es-es/foto/llaves-cartera-5930/ Recuperado el 26 de mayo de 2023.

Kindel Media de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de robot aspirador]. https://www.pexels.com/es-es/foto/escalera-innovacion-electronica-automatico-8566431/ Recuperado el 26 de mayo de 2023.

Lara Jameson de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de mapa]. https://www.pexels.com/es-es/foto/banderas-mapa-minusculo-geografia-8828328/ Recuperado el 26 de mayo de 2023.

Pavel Danilyuk de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de robot]. https://www.pexels.com/es-es/foto/juguete-naturaleza-muerta-robot-fondo-gris-8294591/ Recuperado el 26 de mayo de 2023.