Definición del ángulo denominado Radian y el orígen del número π

Dr. José Antonio García Barreto
Investigador Titular B
Instituto de Astronomía,
Universidad Nacional Autónoma de México

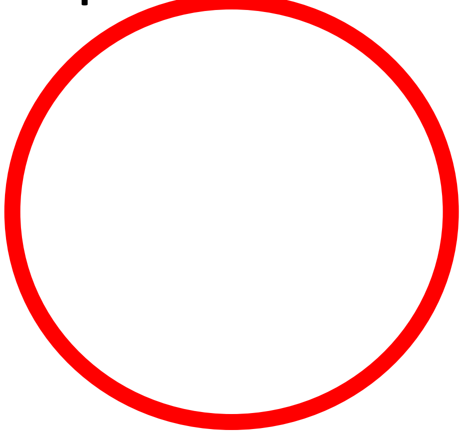
Material Didáctico para el curso , ***Astrofísica General,*** a nivel licenciatura para estudiantes de física ofrecido en la Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad Universitaria, Marzo de 2020

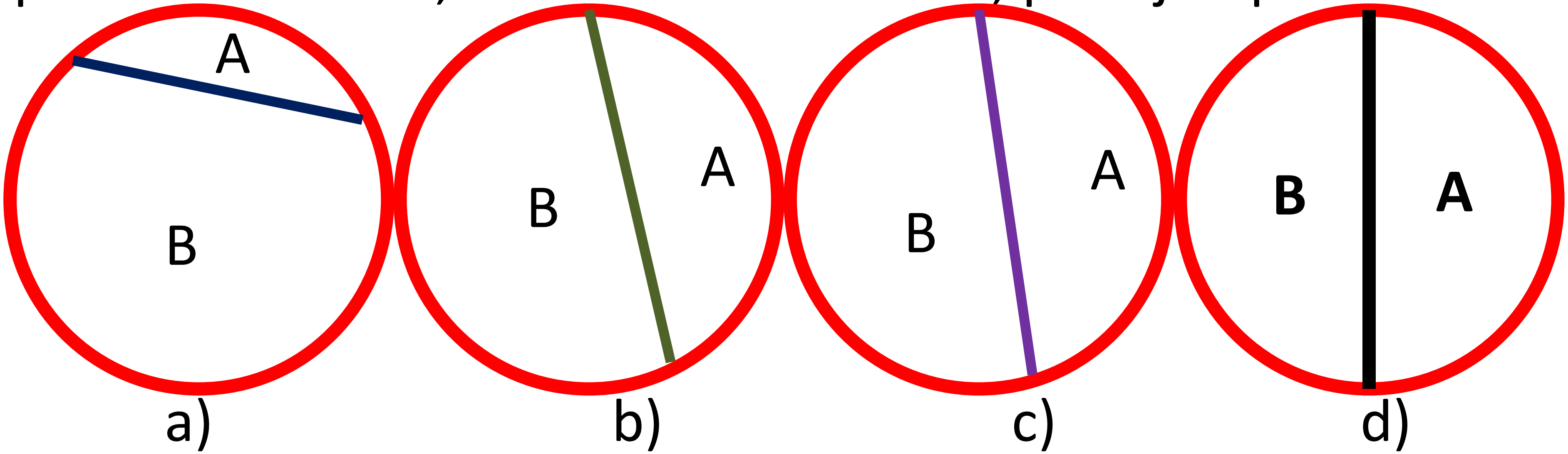
1) La definición del Radían

1) Tales (de Mileto nació en 640 AnE y falleció en 546 AnE) fue el primer gran filósofo griego que introdujo muchos conceptos abstractos en los estudios de geometría.

Entre ellos, ***línea recta ó curva*** la definió como el conjunto infinito de puntos, sin grosor, sin dimensiones. ***Línea curva cerrada*** es un conjunto infinito de puntos de tal forma que el último punto está espacialmente en el mismo lugar que el primer punto. Por ejemplo: ***el círculo***



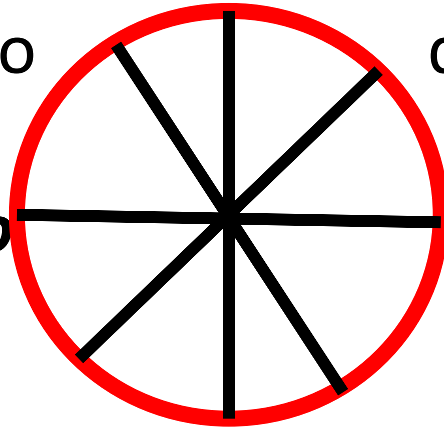
En aquélla época pensaron que podían trazar ***líneas rectas*** que iniciaran en un punto del ***círculo*** y terminaran en otro punto del círculo, diferente al del inicio, por ejemplo:

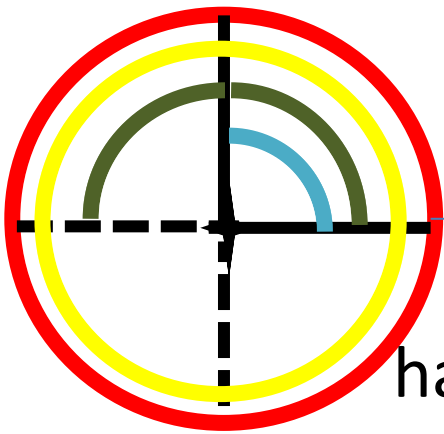


Tales se dío cuenta que diferentes ***líneas rectas*** dividian al círculo en dos áreas, en los ejemplos de arriba, las áreas A y B siendo una más grande que la otra [a), b) y c)], pero ***sólo había una línea recta*** que dividía al círculo en dos áreas Iguales **A** y **B**, ejemplo d).

A la ***línea recta*** que divide al círculo en dos áreas iguales la denominó ***diámetro del círculo***

El ***diámetro de un círculo (D)*** es cualquier línea recta que divida al círculo en dos áreas iguales, independientemente del punto Inicial y final. Lo que tienen en común todas ellas es que se cruzan en un mismo punto que define el ***centro*** del ***círculo***.





Dos ***diámetros*** perpendiculares dividen al ***círculo*** en cuatro áreas iguales. Antes de los conceptos abstractos de Tales, ya los habitantes de Babilonia, Persia, Egipto los denominaban cuadrantes.

a) El ángulo entre el semidiámetro horizontal y el semidiámetro vertical mide 90° (arco azul), es decir el ángulo que subtiende el arco de un cuadrante es 90°.

b) El ángulo desde el semidiámetro horizontal derecho y el semidiámetro horizontal izquierdo mide 180° (arco verde), es decir, el ángulo que subtiende el arco de un hemisferio, dos cuadrantes, es 180°.

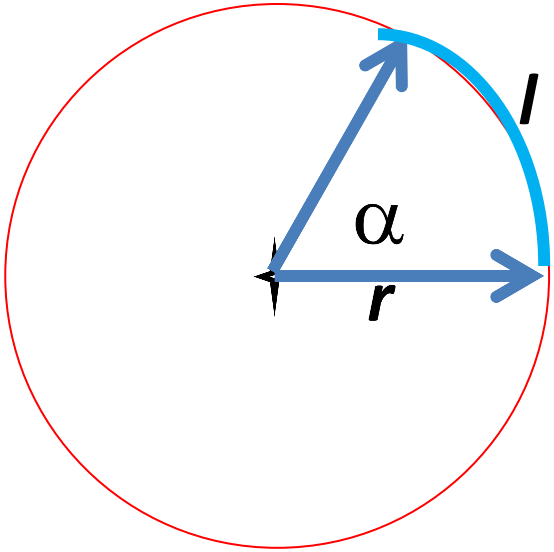
c) El ángulo desde el semidiámetro horizontal derecho pasando por el semidiámetro horizontal izquierdo y volviendo al semidiámetro horizontal derecho mide 360° (arco amarillo), es decir, el ángulo que subtiende el arco de la suma de dos hemisferios, o circunferencia es 360°.

d) Al semidiámetro de un círculo se le denominó ***radio del círculo (r)***.

$$\boldsymbol{D = 2\,r}$$

¿ Cuál es el ***ángulo que subtiende un arco*** con longitud igual al radio de un ***círculo***?

Al ***ángulo*** que subtiende un ***arco con longitud, l***, igual al ***radio*** de un ***círculo***, en este ejemplo indicado por la letra α se le denomina ***radian***.



longitud de un arco de círculo = radio × ***ángulo*** que subtiende el arco

$$l = r \times 1\ \alpha$$

La expresión en unidades dimensionales indica forzosamente que el valor de α no debe tener unidades.

¡ Un ángulo expresado en radianes cumple con ese requisito !

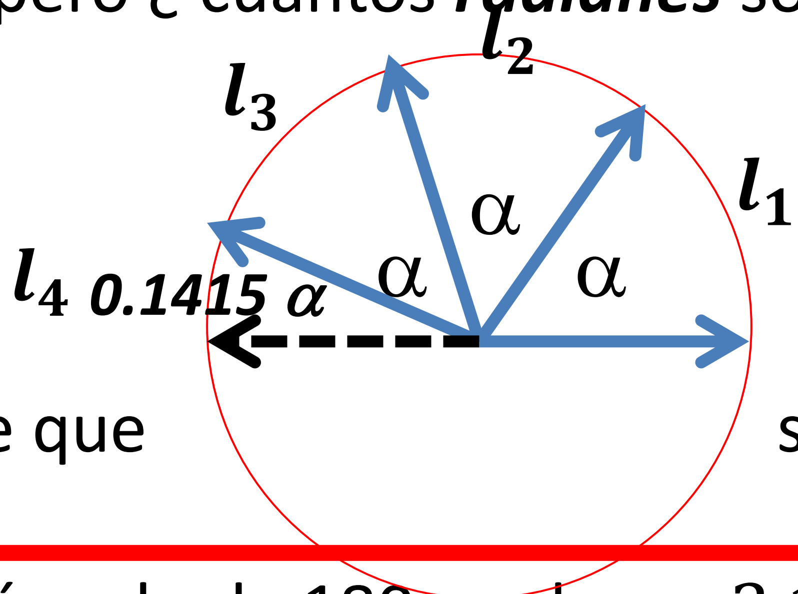
Un ángulo menor de un ***radian*** puede solamente subdividirse entre 0 y 1, en números decimales racionales o irracionales.

Un ángulo mayor de un ***radian*** puede ser mayor que 1 ya sea entero, racional, o irracional.

Al contrario de la medición de un ángulo en grados, donde el grado tiene 60 minutos y 1 minuto tiene 60 segundos, ***un radian*** no tiene subdivisiones con otros nombres.

2) El orígen del número π

Se sabe que el ángulo que subtiende un arco con una longitud de un hemisferio es 180°,
pero ¿ cuántos ***radianes*** son ?



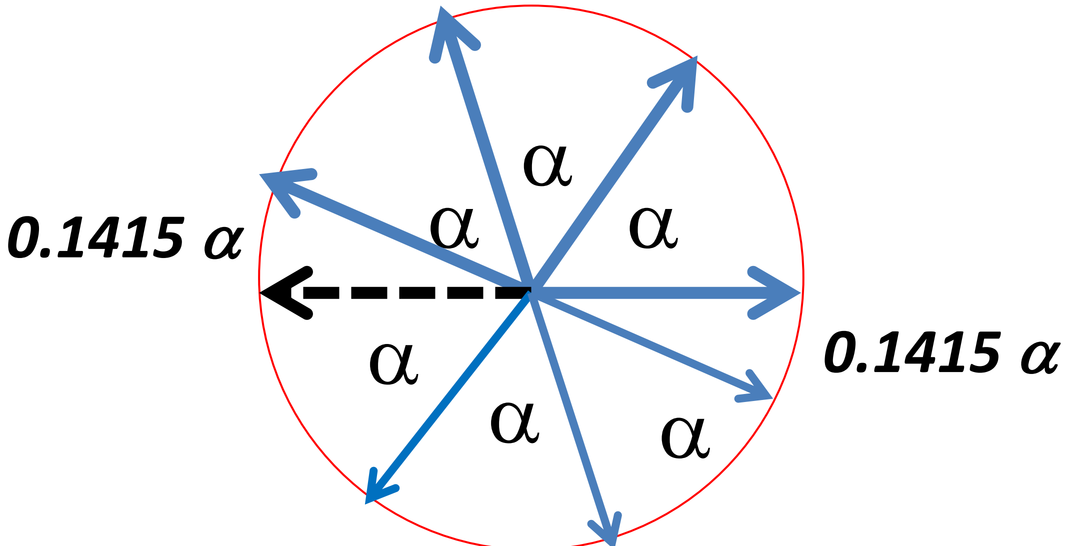
De la figura se ve que son $3\alpha + 0.1415\,\alpha$

Por lo tanto un ángulo de 180 grados $= 3.1415\,\alpha$ radianes

La longitud total de un arco de un hemisferio *es* $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$,
pero $l_1 = l_2 = l_3 \equiv \boldsymbol{l}$. *Finalmente* $\boldsymbol{l_{hemisferio}} = \boldsymbol{r} \times \mathbf{3.1415}\,\alpha$

¿ Cuál es la ***longitud de un arco*** que subtiende la suma de dos hemisferios de un círculo? es decir,

¿ Cuál es ***la longitud de la circunferencia*** de un ***círculo ?***



$$\textbf{Circunferencia} = r \times 3.1415\,\alpha + r \times 3.1415\,\alpha$$

$$\textbf{Circunferencia} = 2\,(r \times (\color{red}{3.1415}\,\alpha)$$

$$\textbf{Circunferencia} = \underbrace{2\,r}_{\text{Diámetro lineal del círculo}} \times \color{red}{\underbrace{\pi\,\color{black}{\alpha}}_{\text{Ángulo subtendido}}}$$

En general, al número irracional 3.14159265358…
se le denomina el ***número*** con la letra griega ***pi,***

$$\pi \approx 3.14159265358\ldots$$

En el ejemplo de la longitud de la circunferencia π indicaba el número de ángulos en unidades de radianes.
Para expresiones numéricas los ángulos expresados en unidades de radianes no afectan las dimensiones espaciales.

La longitud de la circunferencia (en unidades lineales) es π (ángulos en unidades de radianes) por diámetro (en unidades lineales). $C = \pi D$