Concepto de ángulo sólido en Astronomía

Dr. José Antonio García Barreto
Investigador Titular B
Instituto de Astronomía,
Universidad Nacional Autónoma de México

Material didáctico para utilizarse en el curso ***Astrofísica General*** a nivel licenciatura para estudiantes de física ofrecido en la Facultad de Ciencias, UNAM, Abril 2020

Un poco de historia

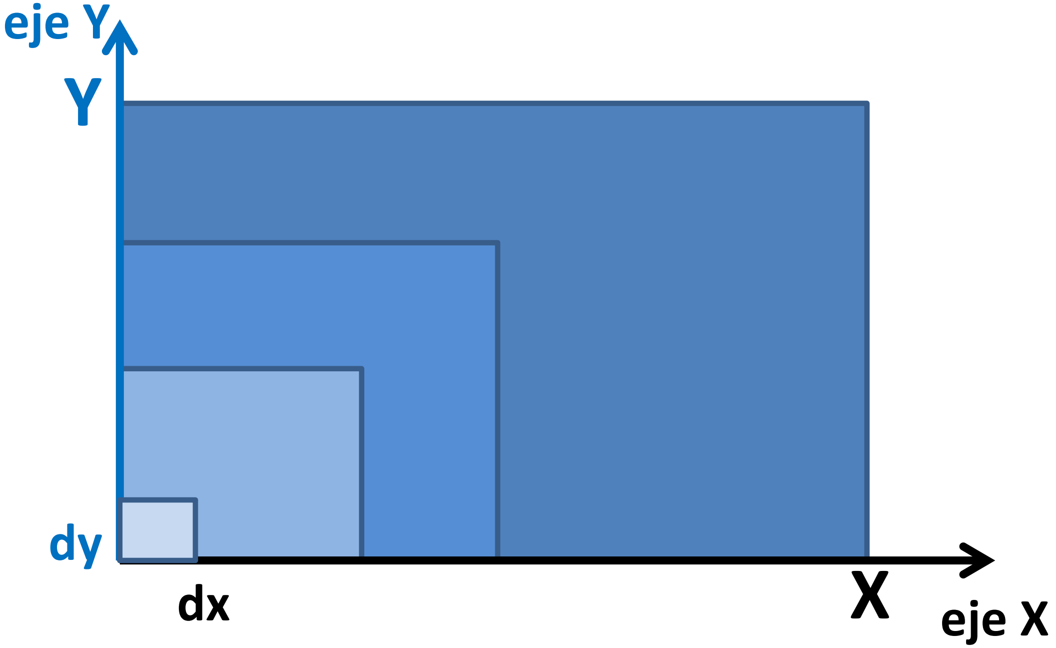
a) <u>Area de una superficie</u>: desde la primaria nos enseñaron que el área de un cuadrado era lado por lado., el área de un rectángulo era base por altura.
En la escuela secundaria nos enseñaron que si un lado del cuadrado mide X, entonces $A = X \times X$, y quizás en cursos mas avanzados $A = X^2$. En el caso del rectángulo:

$A = B \times H$, donde B es la base y H la altura

En el último año de preparatoria y primer año de licenciatura, con conocimientos de cálculo diferencial e integral con dos variables en un sistema de coordenadas cartesianas, nos enseñaron:

$$A = \int_0^X \int_0^Y dx\, dy = XY$$

Pero aquí en el primer curso de *Astrofísica General* nos Interesa ver con más detalle el proceso de la determinación del área de un rectángulo:



$$\int_0^A da = \int_0^X \int_0^Y dx\, dy$$

pero como x, y son variables independientes

$$A = \int_0^X dx \int_0^Y dy$$

Finalmente:

$$A = XY$$

Es decir, la distancia x va incrementándose en pequeños intervalos dx, desde 0 hasta el valor X. Después o al mismo tiempo la distancia y va incrementándose en intervalos dy, desde 0 hasta el valor Y.

Al incrementar la variable y al mismo tiempo o después de incrementar la variable x, se esta "creando", barriendo" o "cubriendo",

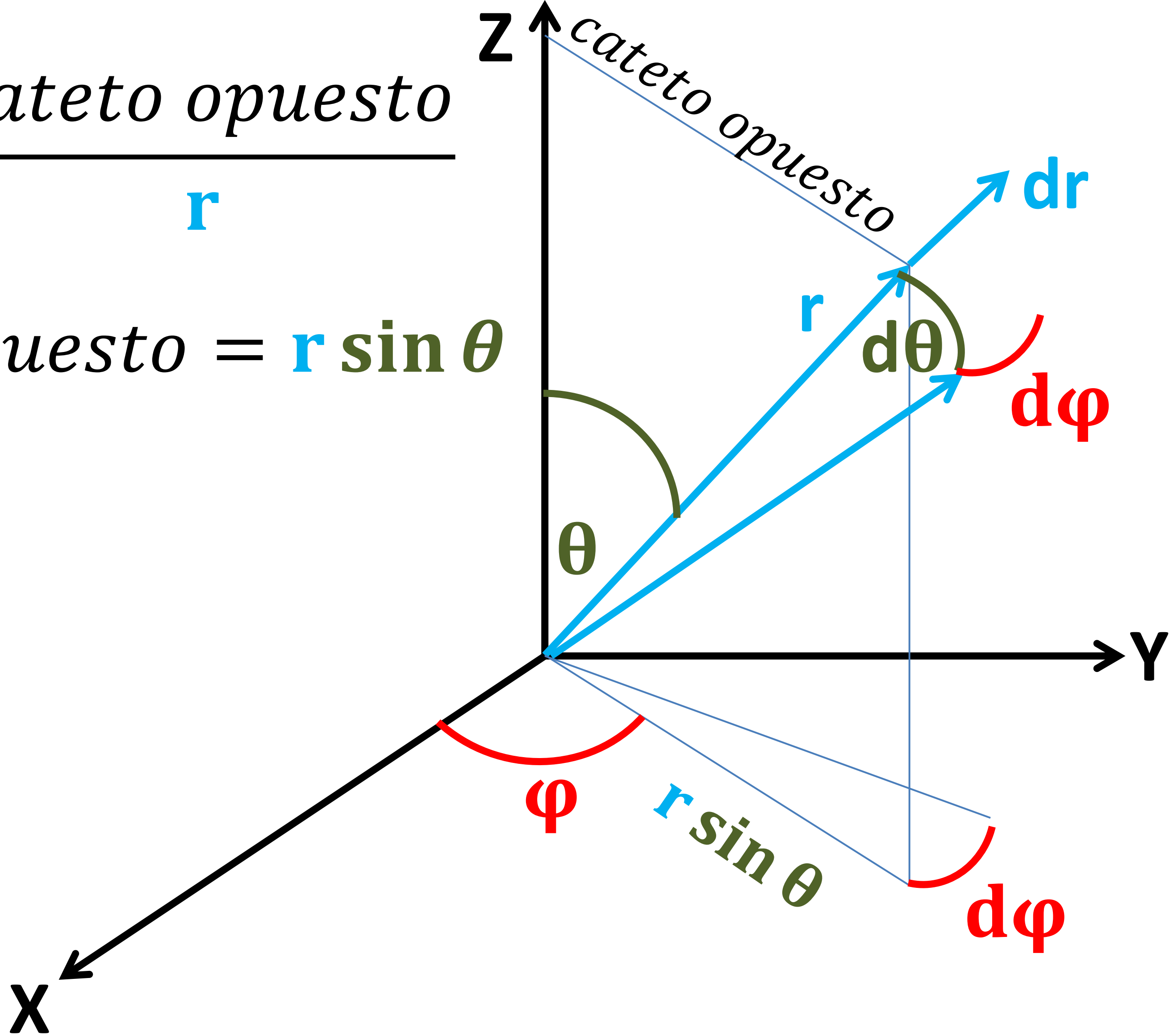
el área total A.

b) <u>Volumen de una esfera</u>: en forma similar desde fines del sexto año de primaria o quizás en el segundo o tercer año de secundaria se nos enseño que el volumen de una esfera es cuatro tercios de pi por radio elevado a la tercera potencia. ¿las unidades? Centímetros cúbicos, metros cúbicos, kilómetros cúbicos etc. esas unidades del volumen se las da la unidad de radio de la esfera elevado a la potencia 3. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

En el último año de preparatoria o en el primer año de la licenciatura con los cursos de cálculo diferencial e integral nos enseñaron que hay al menos otro sistema de coordenadas además de las **cartesianas (x, y, z)**, éstas se conocen como coordenadas **esféricas** $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$.

$$\sin\theta = \frac{cateto\ opuesto}{r}$$

$$cateto\ opuesto = r\sin\theta$$



En esos primeros cursos de cálculo diferencial e intregral de tres variables (esféricas) nos enseñaron que el voúmen de una esfera se puede expresar como:

$$\int_0^V dV = \int\int\int r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Las unidades del volumen están dadas por las unidades del Radio de la esfera elevado a la potencia 3, por ejemplo: cm^3, m^3, km^3. Pero nunca nos hicieron énfasis en lo que representa el factor $\frac{4\pi}{3}$

Aquí en el curso de ***Astrofísica General*** nos gustaría ver con más detalle como se lleva a cabo la integral en tres dimensiones con variables en coordenadas esféricas para tener el volumen de una esfera:

Debemos recordar que, al igual que la integral doble para obtener el área de un rectángulo, la triple integral en coordenadas esféricas significa:

1) la longitud **r** incrementa en intervalos muy cortos, **dr**, desde 0 hasta el valor máximo R,

2) la **longitud del arco** que abarca el cambio de la varibale θ, en intervalos cortos, **d**θ, es (ver notas de clase con el tema definición de un radian) **r d**θ,

3) la longitud del arco que abarca el cambio de la variable φ, en intervalos cortos, $d\varphi$, es $r \sin \theta \, d\varphi$,

4) el incremento del ángulo θ puede ser de 0° hasta 180°, pero la longitud del arco que abarque ese intervalo de ángulos es de 0 a π radianes,

5) el incremento del ángulo φ debe ser de 0° hasta 360°, pero la longitud del arco que abarque ese intervalo de ángulos es de 0 a 2π radianes.

Por lo tanto ya podemos escribir ***con conocimiento de causa*** los límites de cada integral para determinar el volumen de una esfera:

$$\int_{0}^{V} dv = \int_{0}^{R}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Pero como las coordenadas son independientes, las integrales son conmutativas y las podemos escribir:

$$V = \int_{0}^{R} r^2 dr \int_{0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{0}^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{R^3}{3}\left(-\cos\theta\right)\Big|^{\pi} 2\pi\ (radianes)$$

$$V = \frac{R^3}{3} 2\pi\{(-[\cos\pi]) - (-\cos 0)\}$$

$$V = \frac{R^3}{3}\quad 2\pi \quad \{(-[-1]) - (-1)\}$$

$$V=\frac{\boldsymbol{R^3}}{\mathbf{3}}\mathbf{2\pi(radianes)}\;\mathbf{2(radianes)}$$

$$V=\frac{\boldsymbol{R^3}}{\mathbf{3}}\mathbf{2}\times\mathbf{2\pi(radianes}\;\times\boldsymbol{radianes})$$

$$V=\frac{\boldsymbol{R^3}}{\mathbf{3}}\mathbf{2}\times\mathbf{2\pi}\;(\text{radianes})^2$$

Finalmente podemos escribir:

$$V=\mathbf{4\pi(radianes)^2}\,\frac{\mathbf{R^3}}{\mathbf{3}}$$

$$V = \mathbf{4\pi(radianes)^2 \frac{R^3}{3}}$$

Si sólo nos fijamos en las unidades del volumen, no sabemos la geometría del objeto, podría ser un cubo de lado R.

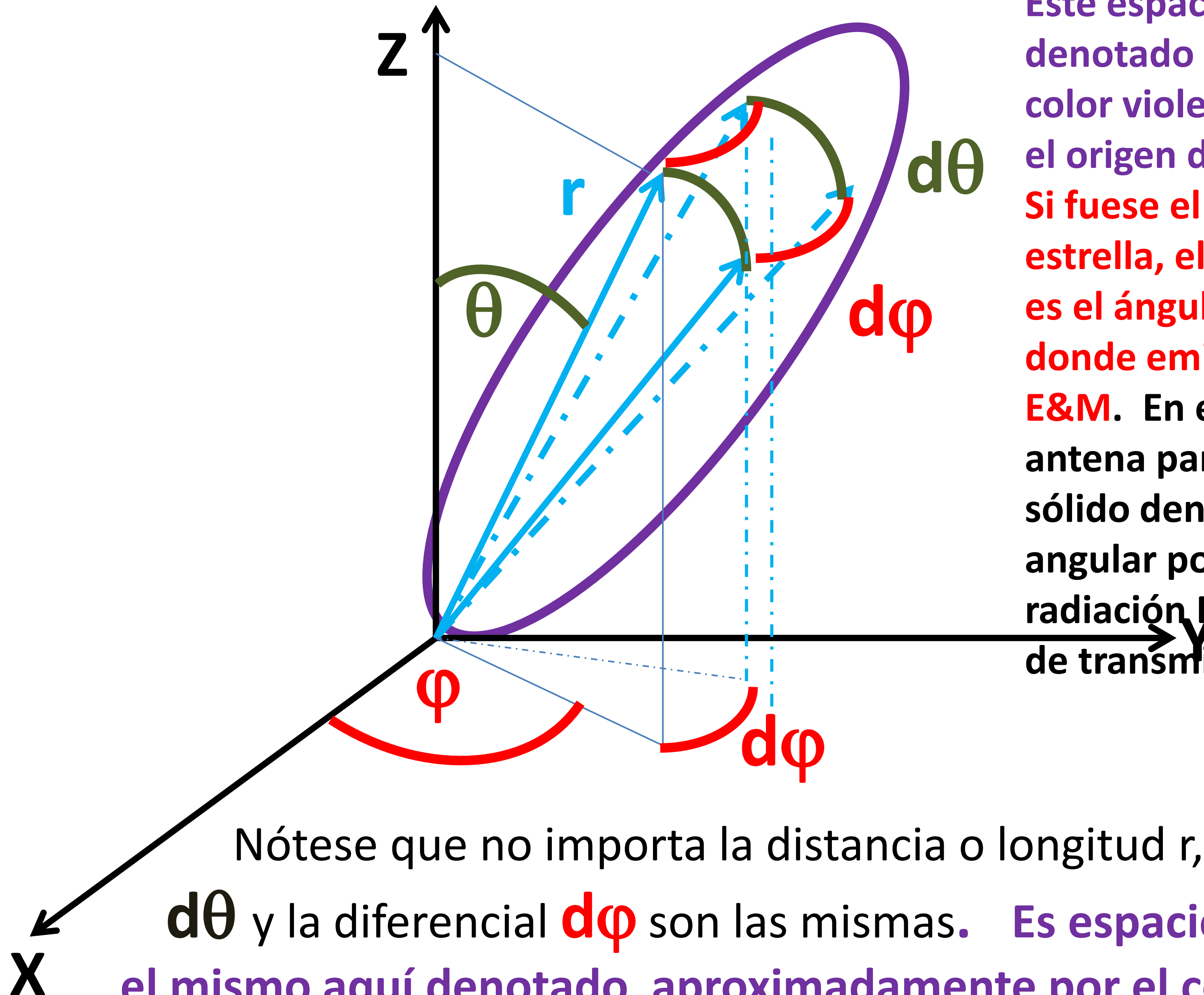
Lo que nos indican los 4π (esterorradianes) es que **¡**“se cubre, se barre, se crea”, el **“espacio angular”** de una esfera**!**

La esfera es un objeto cerrado con área $A = \mathbf{4\pi\ R^2}$

Angulo sólido (en astronomía)

Con todo lo expuesto en las diapositivas anteriores, ahora ya podemos fácilmente reconocer la expresión que en astronomía se denomina **ángulo sólido, Ω**

En principio está definido utilizando coordenadas esféricas por la razón de que las estrellas, digamos nuestro sol, tiene una geometría esférica, ver figura en la siguiente diapositiva, pero en general los astrónomos desean determinar el ángulo sólido que subtiende un objeto en la bóveda celeste.



Este espacio angular denotado por el contorno color violeta se crea desde el origen de coordenadas. Si fuese el centro de una estrella, el espacio angular es el ángulo sólido por donde emitiría su radiación E&M. En el caso de una antena parabólica, el ángulo sólido denotaría el espacio angular por donde emite la radiación E&M en el proceso de transmisión.

Nótese que no importa la distancia o longitud r, la diferencial **dθ** y la diferencial **dφ** son las mismas. **Es espacio angular es el mismo aquí denotado aproximadamente por el contorno color violeta.** Lo que cambiaría serían las longitudes de los arcos.

$$\int_{0}^{\Omega} \mathbf{d\Omega} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{\sin\theta\ d\theta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{d\varphi}$$

¡ Si y sólo si los límites de la integral de la variable θ son desde **0** hasta π, y los límites de la integral de la variable φ son desde **0** hasta **2**π entonces **el ángulo sólido** corresponde al espacio angular de una esfera!

$$\Omega_{\mathbf{estrella}} = \mathbf{4\pi\ esterorradianes}$$

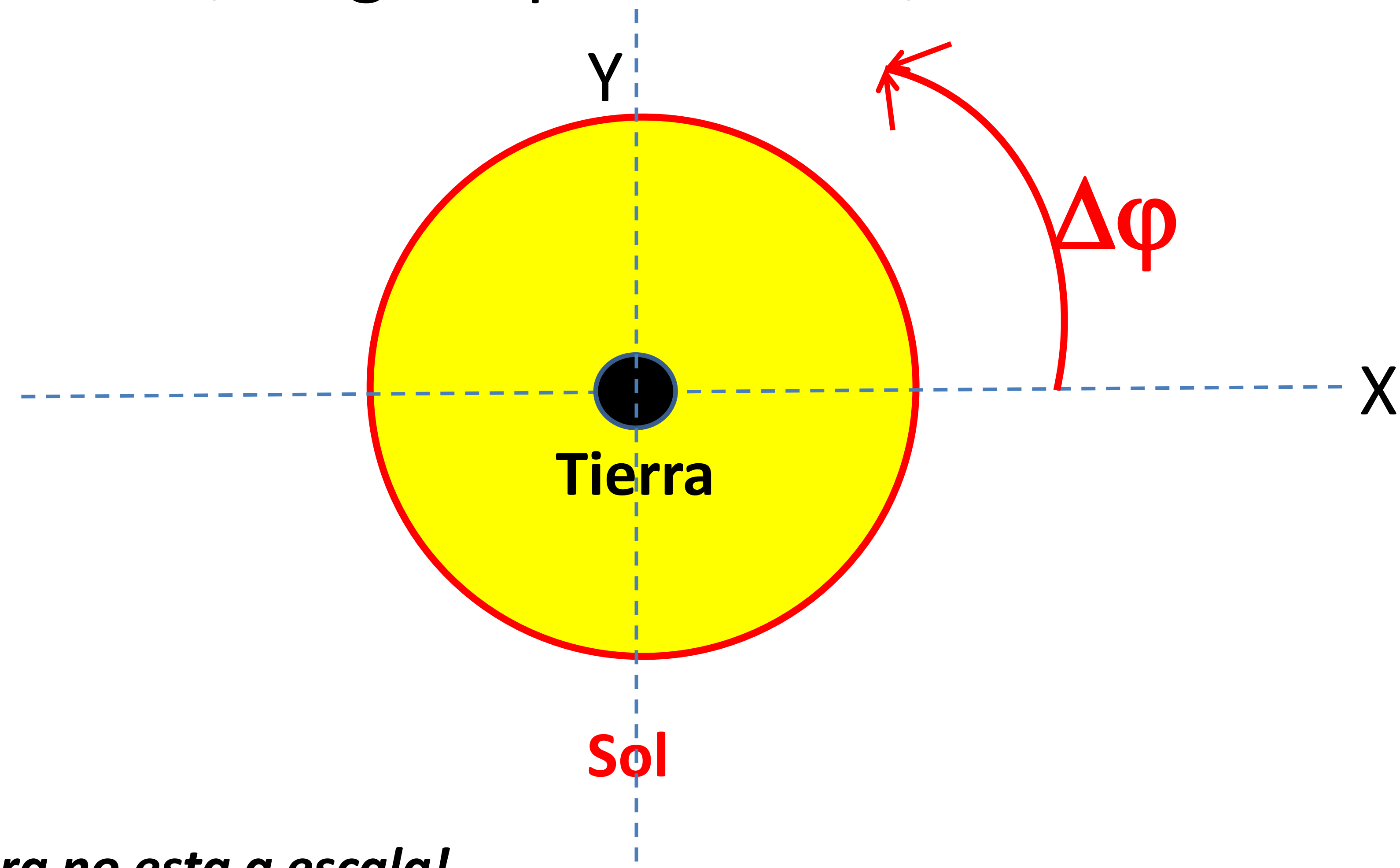
Confirmando, para un **objeto (estrella o antena parabólica) que emita** radiación E&M, la diferencial de ángulo sólido es:

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

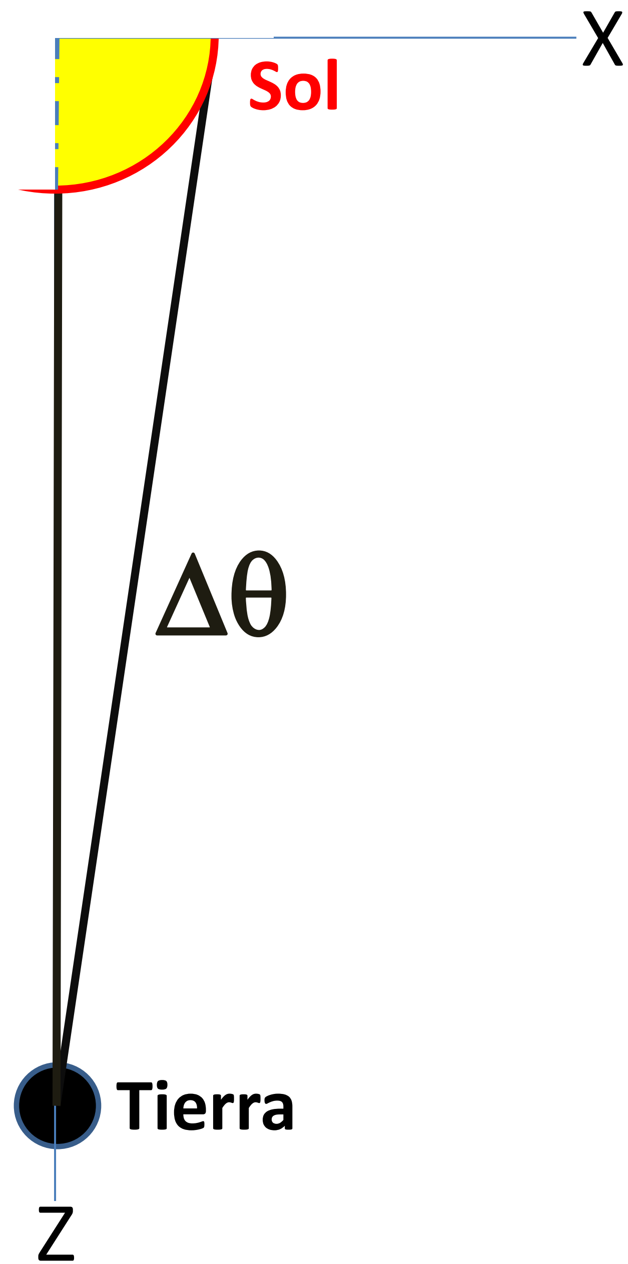
Para el caso de recepción de radiación E&M, por un telescopio óptico o por una antena parabólica (radio telescopio)

¿Cuál es el ángulo sólido por donde se recibe la radiación de una estrella que emite radiación E&M?

Cualquier astrónomo en la Tierra sólo observa el hemisferio del Sol (o cualquier otra estrella) que nos da, valga el pleonasmo, la cara.



¡Figura no esta a escala!


X
Sol
Δθ
Tierra
Z

Dado que el Sol es un objeto extendido, la radiación que se recibe debe ser la paralela a la línea de visión, que es la dirección del vector unitario perpendicular al área receptora, por lo tanto, se introduce el factor $\cos\theta$. Visto desde el eje Z

$$\int d\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Omega_\odot = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)(-1) d\cos\theta$$

Con el cambio de variable: x= cos θ, los límites seran

x=1 para θ=0, y x=0 para θ=$\frac{\pi}{2}$.

$$\Omega_{\odot} = 2\pi\int_{1}^{0} -x\,dx$$

$$\Omega_{\odot} = 2\pi\int_{0}^{1} x\,dx$$

$$\Omega_{\odot} = 2\pi\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$$

Finalmente, el ángulo sólido del Sol desde la Tierra es:

$$\Omega_{\odot} = \pi \text{ esterorradianes}$$