Un ejemplo de aplicación de la lógica proposicional: construcción de sistemas expertos

Asignatura	Matemáticas Discretas
Semestre	Cuarto semestre
Tema relacionado	FES Aragón, Ingeniería en Computación, Plan 2119 Unidad 1. LÓGICA PROPOSICIONAL, CÁLCULO DE PREDICADOS Y ÁLGEBRA BOOLEANA 1.1 Fórmulas proposicionales y tablas de verdad
Autores	Arturo Rodríguez García Castillo Flores Eliam Judá Gonzalo Chávez Onofre Mario Sosa Rodríguez
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE106122 Casos prácticos de Inteligencia Artificial y Robótica para la enseñanza de Matemáticas Discretas en Ingeniería en Computación.	

INTRODUCCIÓN

La lógica es una rama de la filosofía que estudia el razonamiento. Su nombre proviene del vocablo griego *logos*, que significa palabra, discurso o razón. Sus orígenes se remontan a la Edad Antigua y se considera a Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) como el padre de esta disciplina por haber redactado el *Órganon*, que fue el primer conjunto de tratados que estudian el razonamiento válido.

La lógica matemática (también conocida como lógica formal o simbólica) fue fundada en el siglo XIX por George Boole (1815-1864) y Augustus De Morgan (1806-1871), y consiste en dar un tratamiento matemático al estudio de la lógica, introduciendo el uso de símbolos, la definición de sistemas formales, la mecanización de operaciones, etc.

Dentro de la lógica matemática se han desarrollado una gran cantidad de sistemas lógicos (por ejemplo, la lógica de predicados, la lógica difusa, la lógica modal, etc.). El sistema lógico más sencillo de entender, pero no por ello el menos importante, es la lógica proposicional, también conocido como cálculo proposicional.

La lógica proposicional tiene una gran importancia en la computación. Por ejemplo, en los lenguajes de programación se cuenta con operadores lógicos que son utilizados de forma muy frecuente para definir condiciones en las estructuras de decisión y repetición. Otro ejemplo son las compuertas lógicas que se utilizan en la construcción de circuitos digitales.

En este documento profundizaremos en un ejemplo concreto de aplicación de la lógica proposicional: veremos cómo se utiliza en la construcción de sistemas expertos, los cuales fueron una de las primeras aplicaciones exitosas en la historia de la Inteligencia Artificial. Un sistema experto está diseñado para resolver problemas o tomar decisiones en un área de conocimiento especializada, teniendo un desempeño similar o superior al que tendría un humano experto en dicha área. Ejemplos de sistemas expertos son un software diseñado para diagnosticar de forma automática la causa de fallo en maquinaria industrial, o un robot médico capaz de diagnosticar la enfermedad de un paciente y recetarle la medicina adecuada.

Figura 1

Pieza de ajedrez de madera marrón y negra

Fuente: Pixabay de Pexels (s.f)

CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Proposiciones

Una proposición es una oración declarativa, que debe estar asociada a uno y sólo uno de los siguientes posibles valores de verdad: verdadero (V) o falso (F).

Los siguientes son ejemplos de proposiciones:

1.- Marzo es el tercer mes del año.

2.- Una semana tiene ocho días.

Al asignar el valor de verdad, tenemos que la proposición 1 es verdadera (V) y la proposición 2 es falsa (F).

Los siguientes son ejemplos de oraciones que no son proposiciones:

3.- Préstame tus apuntes.

4.- ¡Muchas gracias!

5.- ¿Cuántos años tienes?

6.- Esta oración es falsa.

Estas oraciones no son proposiciones. En los ejemplos 3, 4 y 5 tenemos oraciones de tipo imperativo, exclamativo, e interrogativo respectivamente, y a ninguna de ellas es posible asignarles un valor de verdad. A pesar de que la oración 6 es declarativa, tampoco se le puede asignar un valor de verdad ya que se trata de un ejemplo de paradoja autorreferencial.

Para evitar escribir la proposición completa cada vez que hacemos referencia a ella, podemos representarla con una letra minúscula como p, q, r, etc. Por ejemplo:

p: $Hoy\ es\ lunes$

quiere decir que con la letra p estamos representando a la proposición "Hoy es lunes".

Conectores lógicos

La lógica proposicional tiene un conjunto de conectores u operadores lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, etc.), con los cuales es posible construir proposiciones más complejas a partir de otras más sencillas.

Una proposición es simple si no tiene ningún conector lógico. Por ejemplo: p es una proposición simple.

Una proposición es compuesta si es el resultado de aplicar conectores lógicos a proposiciones simples o a otras proposiciones compuestas. Por ejemplo: $p \wedge (q \vee r)$ es una proposición compuesta que surge de aplicar la operación $\wedge$ para conectar la proposición simple p con la proposición compuesta $(q \vee r)$.

Negación $\neg$

Sea p una proposición simple. El valor de verdad de la proposición compuesta $\neg p$, que se lee como "no p", está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	$\neg p$
F	V
V	F

Esto quiere decir que si una proposición p es falsa y le aplicamos el operador negación, la proposición resultante será verdadera. Por el contrario, si la proposición p es verdadera y le aplicamos el operador negación, la proposición resultante será falsa.

Por ejemplo, sea:

p: $los\ gatos\ pueden\ volar$

El valor de verdad de p es falso. Si aplicamos el operador de negación obtenemos:

$\neg p$: $los\ gatos\ no\ pueden\ volar$

El valor de verdad de $\neg p$ es verdadero.

Conjunción $\wedge$

Sean $p\ y\ q$ dos proposiciones. El valor de verdad de la proposición compuesta $p \wedge q$, que se lee como "p y q", está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

De acuerdo con la tabla anterior, la proposición compuesta $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando de forma simultánea tanto p como q son verdaderas.

Como ejemplo, vamos a suponer que se tienen las proposiciones simples:

p: $Los\ canarios\ son\ aves$

q: $Los\ canarios\ vuelan$

Utilizando el operador de conjunción podemos formar la proposición compuesta:

$p \wedge q$: $Los\ canarios\ son\ aves\ y\ los\ canarios\ vuelan$

Lo cual se puede expresar de forma más compacta con lenguaje natural como:

$p \wedge q$: $Los\ canarios\ son\ aves\ y\ vuelan$

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \wedge q$ es verdadero, ya que tanto p como q son verdaderos.

Como segundo ejemplo, vamos a suponer que se tienen las proposiciones simples:

p: $Los\ avestruces\ son\ aves$

q: $Los\ avestruces\ vuelan$

Utilizando el operador de conjunción podemos formar la proposición compuesta:

$p \wedge q$: $Los\ avestruces\ son\ aves\ y\ vuelan$

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \wedge q$ es falso, ya que a pesar de que p es verdadera, q es falsa.

Disyunción $\vee$

Sean p y q dos proposiciones. El valor de verdad de la proposición compuesta $p \vee q$, que se lee como "p o q", está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

De acuerdo con la tabla anterior, la proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera cuando al menos una de las proposiciones que une es verdadera.

Como ejemplo, vamos a suponer que se tienen las proposiciones simples:

p: $El\ fin\ de\ semana\ voy\ a\ ir\ a\ una\ fiesta$

q: $El\ fin\ de\ semana\ voy\ a\ ir\ al\ cine$

Utilizando el operador de disyunción podemos formar la proposición compuesta:

$p \vee q$: $El\ fin\ de\ semana\ voy\ a\ ir\ a\ una\ fiesta\ o\ al\ cine$

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \vee q$ será falso sólo si no se cumple con ninguna de las dos actividades propuestas (ir a la fiesta o al cine). Por otra parte, será verdadero si se realiza al menos una de las actividades.

En caso de tener tiempo y realizar ambas actividades, la proposición compuesta $p \vee q$ también es verdadera, ya que en ningún momento se indicó que hacer una de las actividades implica que no se pueda hacer la otra. Por esta razón es que a este operador también se le conoce como disyunción inclusiva.

Disyunción exclusiva $\nleftrightarrow$

Sean p y q dos proposiciones. El valor de verdad de la proposición compuesta $p \nleftrightarrow q$, que se lee como "o p o q, pero no ambas", está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \nleftrightarrow q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

De acuerdo con la tabla anterior, la proposición compuesta $p \nleftrightarrow q$ es verdadera cuando una y sólo una de las proposiciones que la componen es verdadera.

Como ejemplo, vamos a suponer que se tienen las proposiciones simples:

p: *El gato está en la sala*

q: *El gato está en la cocina*

Utilizando el operador de disyunción exclusiva podemos formar la proposición compuesta:

$p \nleftrightarrow q$: *O el gato está en la sala o está la cocina, pero no ambas*.

El uso de este operador implica que p y q son mutuamente excluyentes, es decir, si se cumple la primera no se puede cumplir la segunda y viceversa.

Nota 1: no existe un consenso sobre el símbolo para representar a la disyunción exclusiva. En este caso se utiliza el símbolo $\nleftrightarrow$ porque la tabla de verdad de la disyunción exclusiva coincide con la negación del operador bicondicional $\leftrightarrow$ que se explicará más adelante.

Nota 2: aunque con la explicación anterior queda claro que existen dos tipos de disyunción (la inclusiva y la exclusiva), la mayoría de las veces se hace referencia a la primera simplemente como disyunción.

Condicional $\rightarrow$

Sean p y q dos proposiciones. El valor de verdad de la proposición compuesta $p \rightarrow q$, que se lee como “si p entonces q”, está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Cuando se usa este operador, se dice que p es el antecedente y q el consecuente. El único caso en el que la proposición compuesta $p \rightarrow q$ es falsa se da cuando a pesar de que el antecedente es verdadero, el consecuente resulta ser falso. Notemos que el condicional únicamente nos da información sobre lo que debe suceder si cumple el antecedente, pero no dice nada sobre lo que debe ocurrir si no se cumple.

Como ejemplo, vamos a suponer la siguiente situación. Andrés es un alumno que ha tenido problemas con la materia de matemáticas y teme que le vaya mal en el siguiente examen parcial. Al pedir ayuda a uno de sus amigos recibe la recomendación de tomar un curso de regularización de paga. Cuando acude a la escuela de regularización a preguntar sobre el curso, el dueño le dice que los resultados están garantizados: “Si tomas este curso de regularización entonces te garantizamos que acreditarás tu examen”. ¿Será que el dueño de esta escuela está diciendo la verdad?

Aquí se tienen las proposiciones simples:

p: $Andrés\ tomará\ el\ curso\ de\ regularización$

q: $Andrés\ aprobará\ su\ examen$

Utilizando el operador condicional podemos formar la proposición compuesta:

$p \rightarrow q$: $Si\ Andrés\ toma\ el\ curso\ de\ regularización\ entonces\ aprobará\ su\ examen.$

Como primer caso vamos a suponer que p es falsa, es decir, Andrés decide no tomar el curso. En este caso ya no hay forma de evaluar si lo que dijo el dueño de la escuela es falso o verdadero: ya sea que Andrés apruebe o no su examen (es decir, que q sea falsa o verdadera), termina siendo independiente del curso de regularización. Por ejemplo, puede ser que apruebe por otro motivo (quizá el examen era muy sencillo o a lo mejor pidió ayuda a un amigo para que le explicara las dudas que tenía). El dueño de la escuela de regularización nunca le dijo lo que pasaría si no tomaba el curso, por lo que no podemos concluir que le dijo algo falso. Esto explica por qué los dos primeros renglones de la tabla de verdad terminan evaluados como verdaderos.

Como segundo caso, veamos lo que ocurre si p es verdadera, es decir, si Andrés tomó el curso de regularización. En este caso, si q es falsa quiere decir que a pesar de haber tomado el curso terminó reprobando, por lo que aquí sí podríamos concluir que el dueño de la escuela es un mentiroso y nos prometió algo falso. Por otra parte, si q es verdadera quiere decir que Andrés aprobó exitosamente su examen y por lo tanto la promesa del dueño de la escuela de regularización fue verdadera.

Bicondicional $\longleftrightarrow$

Sean $p\ y\ q$ dos proposiciones. El valor de verdad de la proposición compuesta $p \leftrightarrow q$, que se lee como “q si y sólo si p”, está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A partir de la tabla notamos que la diferencia con respecto al condicional se encuentra en el caso en el que el antecedente p es falso y el consecuente q es verdadero. Esto quiere decir que se excluye la posibilidad de que se cumpla q por una causa distinta a p.

Tomando el mismo ejemplo de Andrés y su curso de regularización, vamos a suponer que el dueño le dijo lo siguiente: “Aprobarás tu examen si y sólo si tomas el curso de regularización”.

Aquí se tienen de nuevo las proposiciones simples:

p: $Andrés\ tomará\ el\ curso\ de\ regularización$

q: $Andrés\ aprobará\ su\ examen$

Utilizando el operador bicondicional podemos formar la proposición compuesta:

$p \leftrightarrow q$: $Andrés\ aprobará\ su\ examen\ si\ y\ sólo\ si\ toma\ el\ curso\ de\ regularización.$

Si Andrés no toma el curso y reprueba el examen, o si toma el curso y aprueba el examen, estaríamos concluyendo que el dueño del curso nos dijo la verdad.

Pero si no toma el curso y aprueba el examen, o toma el curso y no aprueba el examen, entonces nos daríamos cuenta de que el dueño nos dijo algo falso.

Construcción de tablas de verdad

Una tabla de verdad muestra de forma exhaustiva todos los posibles valores de verdad que puede tomar una proposición compuesta a partir de todas las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

Por ejemplo, vamos a suponer que se desea construir la tabla de verdad de $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$. Como primer paso identificamos las proposiciones simples: p, q, r. En una tabla asignamos todas las posibles combinaciones de valores de verdad (ver las primeras tres columnas de la tabla). Posteriormente, con ayuda de las tablas de verdad de los operadores lógicos, en cada renglón usamos los valores de verdad de las proposiciones simples y realizamos las operaciones correspondientes. En caso de que la proposición compuesta sea muy grande, podemos hacer el proceso por etapas. Por ejemplo, en este caso podríamos empezar calculando $(p \wedge q)$, posteriormente $(p \vee r)$, y finalmente $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \vee r)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$
F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V

Nota: el orden de prioridad de los operadores lógicos más comunes (de mayor a menor) es el siguiente: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS EXPERTOS

La Inteligencia Artificial es una disciplina que nació a mediados del siglo XX. Entre los primeros trabajos destaca en 1950 el artículo *Computing Machinery and Intelligence* de Alan Turing, en el que sentó muchas de las ideas fundamentales de esta disciplina al tratar de responder la pregunta “¿Las máquinas pueden pensar?”.

Desde entonces, esta disciplina ha tenido grandes avances al intentar dotar a las máquinas de habilidades que se consideran propias de la inteligencia humana. Aunque falta un gran camino por recorrer para lograr que una computadora replique la inteligencia de un humano, hoy en día podemos ser testigos de cómo algunos sistemas computacionales son capaces de exhibir comportamientos inteligentes al resolver algunas tareas concretas (por ejemplo, los asistentes virtuales que pueden recibir órdenes mediante comandos de voz, o el reconocimiento automático de rostros al subir nuestras fotos en redes sociales).

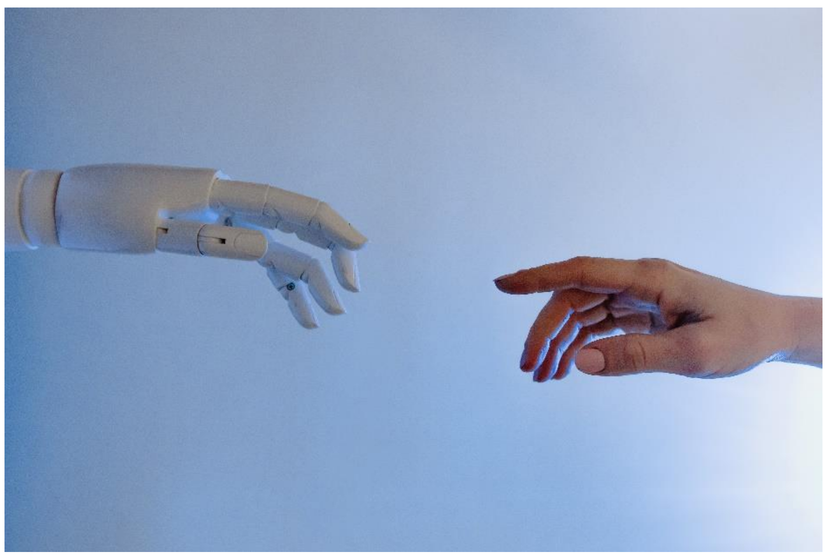

Figura 2

Sin título [Fotografía de contacto de mano entre robot y humano]

Fuente: Tara Winstead de Pexels (s.f.).

En las primeras décadas de desarrollo de esta disciplina el paradigma que predominó fue la Inteligencia Artificial Simbólica, en el que la lógica simbólica representaba un papel fundamental. Entre los casos de éxito de este paradigma se encuentran los sistemas expertos, que son sistemas computacionales capaces de resolver problemas y tomar decisiones en un área de conocimiento o tema específico, replicando el conocimiento y las habilidades de un experto humano en dicha área.

Los sistemas expertos no son de propósito general y si les planteamos un problema fuera de su especialidad no podrán darnos una solución. Por el contrario, cuentan con una inmensa cantidad de conocimiento en el área para la que fueron diseñada y son capaces de resolver problemas a la par o mucho mejor que un humano experto en el tema.

La construcción de un sistema experto no es trivial. Primero se tiene que elegir un campo de conocimiento bien delimitado. Después es necesario conseguir humanos que sean expertos en ese tema, pues serán ellos los que nos proveerán de su conocimiento, el cual deberá ser representado de alguna forma en el lenguaje de programación que se está utilizando. A esto se le llama Ingeniería del Conocimiento.

Entre los sistemas expertos, existen algunos que se conocen como sistemas basados en reglas. Una de sus características es que el conocimiento de los expertos humanos se traduce en un conjunto de reglas de la forma $SI\ P\ ENTONCES\ Q$, es decir $P \rightarrow Q$, donde P y Q pueden ser proposiciones simples o compuestas.

Por ejemplo, vamos a suponer que una cadena de pizzerías quiere automatizar el proceso de atención de quejas en su app, y en lugar de tener a un humano decidiendo cuál es la acción correcta para cada tipo de queja, decide convertir todo a un conjunto de reglas. Un ejemplo de regla es la siguiente:

Si la entrega se demoró más de 30 minutos y no está lloviendo entonces la orden es gratis y se debe enviar un mensaje de disculpa al cliente. Esta regla es de la forma $(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow (q_1 \wedge q_2)$, con:

p_1: $La\ entrega\ se\ demoró\ más\ de\ 30\ minutos.$

p_2: $Está\ lloviendo.$

q_1: $La\ orden\ es\ gratis.$

q_2: $Se\ debe\ enviar\ un\ mensaje\ de\ disculpa.$

Por supuesto que los sistemas expertos reales son sobre temas más complicados, que sólo verdaderos expertos en el área pueden entender. Además, las reglas utilizan al máximo todo el poder expresivo de la lógica simbólica. Por ejemplo, uno de los primeros sistemas expertos exitosos fue MYCIN, el cual fue creado en la década de los 70 por Feigenbaum, Buchanan y Shortliffe. Este sistema estaba especializado en el diagnóstico de infecciones sanguíneas. Como ejemplo, Shortliffe (1984:82) nos muestra la forma de hacer la lectura con lenguaje natural de una de las reglas del código en lenguaje LISP:

"Regla 37

SI: 1) La identidad del organismo no es conocida con certeza, y

2) La tinción del organismo es gram negativa, y

3) La morfología del organismo es bastón, y

4) La aerobicidad del organismo es aeróbica

ENTONCES: Hay evidencia fuertemente sugestiva (.8) de que la clase del organismo es enterobacteriaceae".[1]

Aunque no seamos expertos en el diagnóstico de infecciones sanguíneas, podemos darnos cuenta de que la estructura de la regla es de la forma $SI\ P\ ENTONCES\ Q$. Como dato interesante podemos ver que hay un valor de 0.8 en el consecuente, el cual es un factor de certeza (es decir, qué tan seguro estoy de que la afirmación es verdadera) que permite modelar razonamiento con incertidumbre en este tipo de sistemas, y que es un aspecto que va mucho más allá de lo que es posible modelar con lógica proposicional.

Figura 3

Ilustración de Gato Negro y Rojo

[Ilustración de cuerpo humano con microorganismos].

Fuente de la imagen: Monstera de Pexels. (s.f.).

[1] Traducción de la cita realizada por Arturo Rodríguez García.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Resuelve las siguientes tablas de verdad

p	q	$\neg p \vee q$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

p	q	r	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
F	F	F	
F	F	V	
F	V	F	
F	V	V	
V	F	F	
V	F	V	
V	V	F	
V	V	V	

REFERENCIAS

Castillo, E., Gutiérrez, J. M., & Hadi, A. S. (1997). Sistemas expertos y modelos de redes probabilísticas. Academia de Ingeniería, 7-9.

Epp, Susanna S. (2011). *Matemáticas discretas con aplicaciones* (cuarta edición). CENGAGE Learning.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas* (sexta edición). PEARSON Prentice Hall.

Russell, Stuart y Norvig, Peter. (2004). *Inteligencia Artificial. Un Enfoque Moderno* (2ª Edición). PEARSON Prentice Hall.

Shortliffe, Edward H. (1984). Details of the Consultation System. En Buchanan, B. G., & Shortliffe, E. H. (Eds.), *Rule-based expert systems: the MYCIN experiments of the Stanford Heuristic Programming Project* (pp. 78-132). ADDISON-WESLEY.

Turing, A. M. (1950). "Computing Machinery and Intelligence". En *Mind*, Volúmen LIX, 236, pp. 433–460.

Veerarajan, T. (2008). *Matemáticas Discretas con teoría de gráficas y combinatoria*. Mc Graw Hill.

REFERENCIAS DE LAS IMÁGENES

Monstera de Pexels. (s.f.). *Ilustración de Gato Negro y Rojo* [Ilustración de cuerpo humano con microorganismos]. Pexels. https://www.pexels.com/es-es/foto/ilustracion-de-gato-negro-y-rojo-5842119/ Recuperado el 24 de mayo de 2023.

Pixabay de Pexels. (s.f.). *Pieza De Ajedrez De Madera Marrón y Negra* [Fotografía de tablero de ajedrez]. Pexels. https://www.pexels.com/es-es/foto/pieza-de-ajedrez-de-madera-marron-y-negra-163427/ Recuperado el 24 de mayo de 2023.

Tara Winstead de Pexels (s.f.). Sin título [Fotografía de contacto de mano entre robot y humano]. Pexels. https://www.pexels.com/es-es/foto/manos-conexion-futuro-robot-8386434/ Recuperado el 24 de mayo de 2023.