Movimiento Circular Uniforme

En astronomía se utilizan muy frecuentemente las expresiones matemáticas relacionadas con la velocidad y aceleración de un objeto o nube de gas cuando está en un movimiento circular uniforme. Si la trayectoria es elíptica con excentricidad muy baja, éstas expresiones se utilizan como primera aproximación (por ejemplo: Luna alrededor de la Tierra, Tierra alrededor del Sol, Sol alrededor del centro de nuestra galaxia, nube de gas alrededor del centro de una galaxia, etc.).

En principio sabemos de los primeros cursos de física que existen diferentes sistemas de coordenadas espaciales:

- Cartesianas, ó (x, y, z) con cada eje indicado por una línea

recta perpendicular a los otros ejes dos y con vectores unitarios denotados como $\hat{\imath}$ en la dirección de incremento en el eje x, $\hat{\jmath}$ en la dirección de incremento en el eje y, y $\hat{k}$ en la dirección de incremento en el eje z.

- Esféricas, ó (r, θ, φ) en donde la coordenada r incrementa

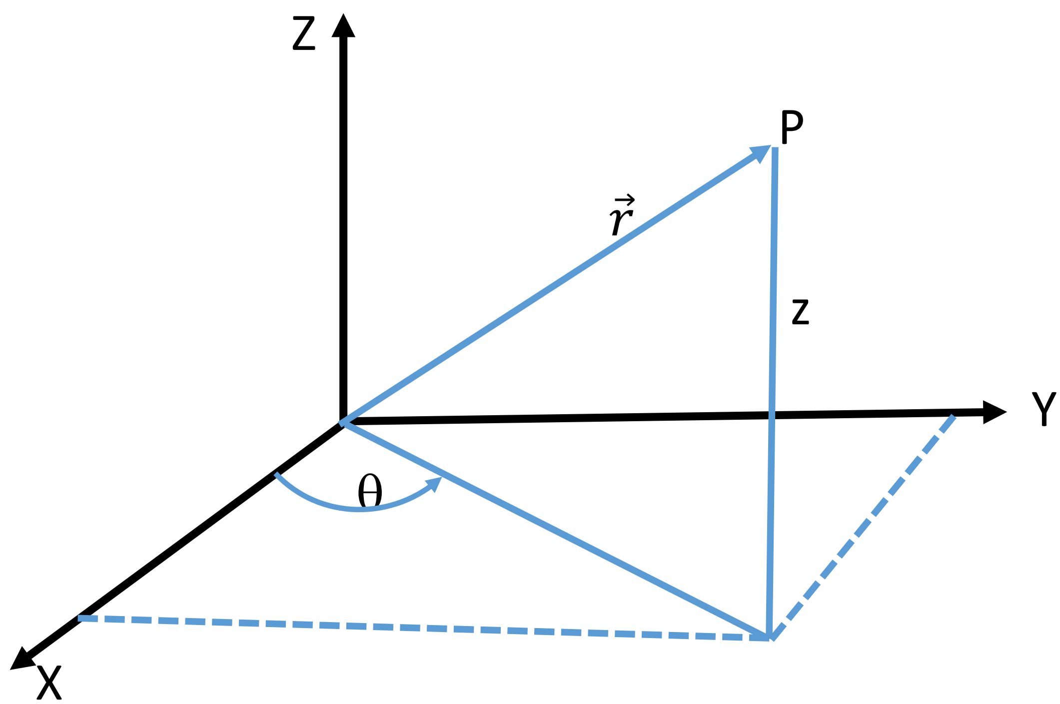
desde el centro, y tiene un vector unitario denotado como $\hat{r}$, la coordenada θ, es el ángulo medido desde el eje z (en el sistema de coordenadas cartesianas) y tiene un vector unitario denotado como $\hat{\theta}$, y la coordenada φ, es el ángulo medido desde el eje x (en el sistema de coordenadas cartesianas) y tiene un vector unitario denotado como $\widehat{\varphi}$.

- Cilíndricas, ó (r, θ, z) en donde la coordenada r incrementa

desde el centro, y tiene un vector unitario denotado como $\hat{r}$, la coordenada θ, es el ángulo medido desde el eje x (en el sistema de coordenadas cartesianas) y tiene un vector unitario denotado como $\widehat{\theta}$, y la coordenada z que es una línea recta igual al eje z de las coordenadas cartesianas y tiene un vector unitario denotado como $\hat{z}$.

- Polares, ó (r, θ) son iguales a las coordenadas cilíndricas, con

z = 0.



La posición espacial en tres dimensiones en coordenadas cilíndricas se denota como el vector $\vec{r}$ el cual se puede expresar:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}, \qquad (1)$$

la velocidad, $\vec{v}$, es igual al cambio de posición con respecto al cambio en el tiempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (2)$$

substituyendo la expresión del vector $\vec{r}$ se tiene

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\imath}) + \frac{d}{dt}(y\hat{\jmath}) + \frac{d}{dt}(z\hat{k}), \qquad (3)$$

desarrollando las derivadas de la multiplicación de dos variables

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + x\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + y\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + z\frac{d\hat{k}}{dt}, \qquad (4)$$

Pero los vectores unitarios en el sistema de coordenadas cartesianas, $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ no cambian con el tiempo, es decir,

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0. \qquad (5)$$

Si utilizamos la notación de Leibnitz, donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, tenemos

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}, \qquad (6)$$

y la aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}. \qquad (7)$$

En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se tiene

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$$z = z. \tag{8}$$

Por lo tanto la distancia al punto P,

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{9}$$

Cuando se restringe el movimiento al plano xy, z = 0,

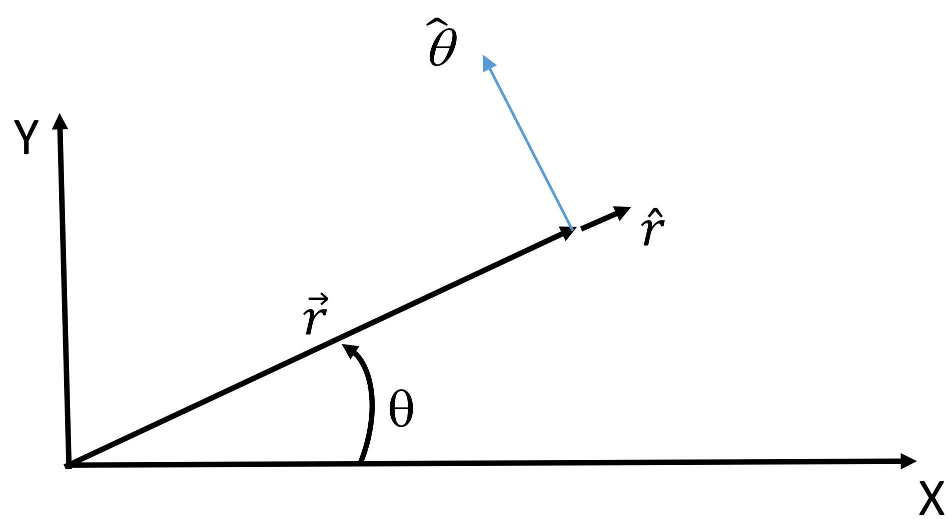
$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{10}$$

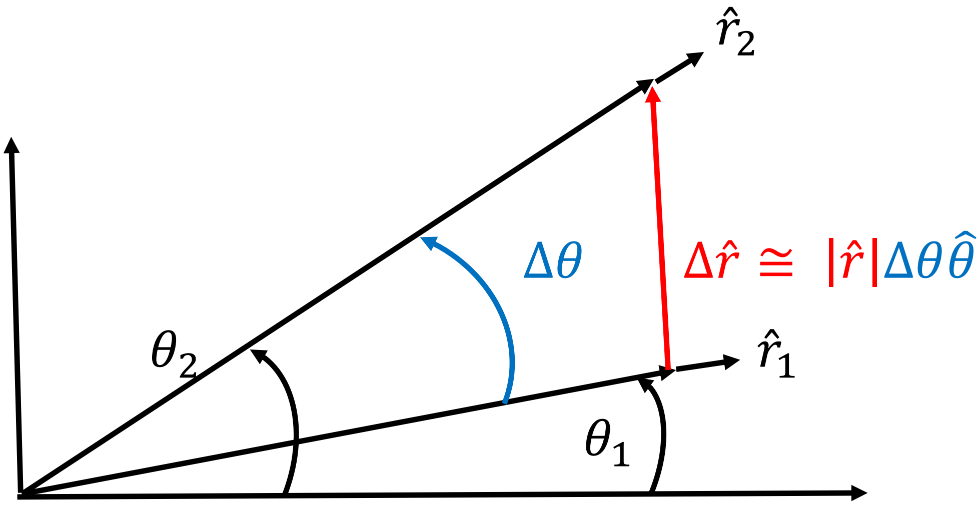
el vector unitario en la dirección radial estará expresado como:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{10a}$$

el vector unitario en la dirección angular será:

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{10b}$$





$\theta_2 > \theta_1$, $r_2$está dirigido hacia una dirección con ángulo θ_2 en el tiempo t_2, $r_1$está dirigido hacia una dirección con ángulo r_1 en el tiempo t_1, es decir, r rota alrededor del centro en dirección $\hat{\theta}$.

La longitud del arco es

$$|\Delta\hat{r}| = |\hat{r}|\Delta\theta\hat{\theta}, \tag{11}$$

las unidades de $[r]$ son (por ejemplo) cm, y las unidades de $[\theta]$ son radianes. Sabemos que $|\hat{r}| = 1$, y que los diferenciales en distancia $|\Delta\vec{r}|$ y en ángulo $\Delta\theta$ ocurren en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$, es decir en Δt. Por lo tanto la expresión 11 se puede escribir como:

$$\frac{|\Delta\hat{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\theta}, \tag{12}$$

en el límite cuando Δt tiende a cero,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \tag{13}$$

pero sabemos que $\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt}$, por lo tanto

$$\hat{v} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \tag{14}$$

$$\dot{r} = \hat{v} = \dot{\theta}\hat{\theta} \tag{15}$$

si hacemos el producto punto (vectorial)

$$\hat{r} \cdot \hat{v} = |\hat{r}|\hat{r} \cdot |\hat{v}|\hat{\theta} \tag{16}$$

$$= |\hat{r}||\hat{v}|\hat{r} \cdot \hat{\theta} \tag{17}$$

$$= \hat{r} \cdot \hat{\theta} \tag{18}$$

pero $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = |\hat{r}|\left|\hat{\theta}\right| \cos 90^{\circ}$, por lo tanto

$$= 0 \tag{19}$$

es decir, el vector unitario de distancia es perpendicular al vector unitario de velocidad en un movimiento circular uniforme.

Podemos expresar la distancia, la velocidad y la aceleración para un movimiento circular uniforme en coordenadas polares (r,θ):

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{19}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} \tag{20}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \tag{21}$$

substituyendo la expresión 15

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{22}$$

La expresión para la aceleración será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt} \tag{23}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \tag{24}$$

para encontrar el cambio de tiempo del vector unitario $\hat{\theta}$ debemos recordar (o reescribir) la expresión (10b)

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{25}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos\theta\left(\dot{\theta}\right)\hat{\imath} - \sin\theta\,(\dot{\theta})\hat{\jmath} \tag{26}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) \tag{27}$$

substituyendo la expresión (10a) en 27 finalmente se tiene

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r} \tag{28}$$

substituyendo las expresiones (15) y (28) en la expresión (24)

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r(\dot{\theta})^2\hat{r}, \tag{29}$$

finalmente reagrupando terminos

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{30}$$

Ahora podemos considerar el caso muy particular en el cual un objeto (digamos una estrella o una nube de gas, en astronomía) se mueve, a primer orden en una trayectoria circular alrededor de un centro, es decir $\dot{r} = 0$ y no tiene aceleración en la dirección radial, es decir, $\ddot{r} = 0$, la aceleración en la dirección radial sera:

$$\vec{a} = -r(\dot{\theta})^2\hat{r} \tag{31}$$

si expresamos $v_\theta = \dot{\theta}$ como la velocidad tangencial, entonces la aceleración en un movimiento circular uniforme será la aceleración centrípeta:

$$\vec{a} = -rv_\theta^2\hat{r} \tag{32}$$