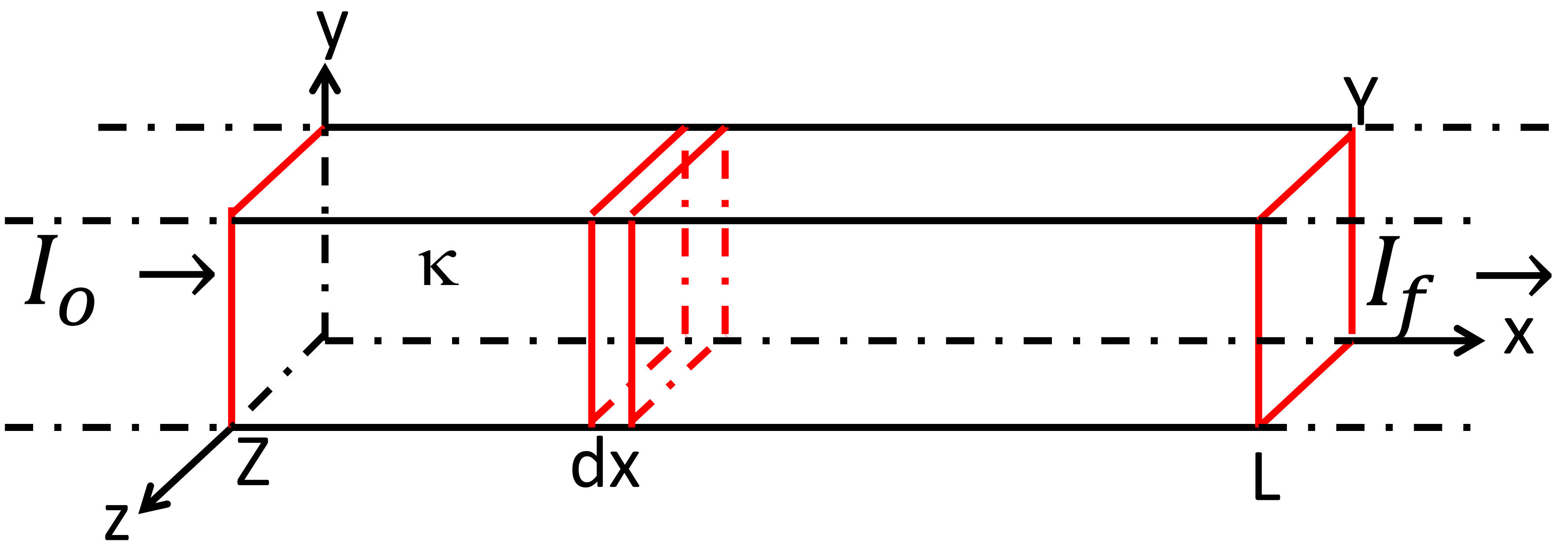
Ecuación de Transferencia de Energía y espesor óptico

Dr. José Antonio García Barreto
Investigador Titular B
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México

Material didáctico para utilizarse en el curso ***Astrofísica General*** a nivel licenciatura para estudiantes de física ofrecido en la Facultad de Ciencias, UNAM, Abril 2020.

1) Considérese radiación entrando al paralelepípedo rectangular con área YZ y longitud a lo largo del eje x en el que se encuentra un gas ideal con coeficiente de absorción κ que no depende de la posición x, ni y, ni z.

Considérese que los lados internos del paralelepípedo son reflejantes, pero no transparentes, es decir, la radiación que entra, sólo puede salir por el área YZ después de una longitud, digamos x=L, es decir, este análisis será en una dimensión.



Por simplicidad en una dimensión se considerarán 3 casos:

1. $I_f = I_0$ este caso implica que la radiación que sale después de una distancia L, es igual a la radiación que entra por el área YZ en x=0. **¡no hay absorción!**
2. $I_f = 0$ este caso implica que toda la radiación que entra por el área YZ en x=0 es absorbida completamente entre x=0 y x=L **¡total absorción!**
3. $I_f = I_0 - \kappa I dx$ este caso implica que la radiación que sale por el área YZ en x=dx, es la radiación que entra por el área YZ en x=0 menos un porcentaje de radiación absorbida en el intervalo dx. **¡ absorción parcial de radiación !**

Más detalle en el caso de absorción parcial,

$$I_f - I_0 = -\kappa I dx \qquad (1)$$

El lado izquierdo de la expresión (1) la podemos escribir como un diferencial de intensidades de brillo o radiación:

$$dI = -\kappa I dx \qquad (2)$$

Multiplicando ambos lados de la expresión (2) por el inverso de I, es decir, 1/I, tenemos:

$$\frac{dI}{I} = -\kappa \frac{I}{I} dx \qquad (3)$$

Finalmente podemos escribir la expresión (3) como:

$$\frac{dI}{I} = -\kappa dx \qquad (4)$$

La expresión (4) es la diferencial de la transferencia de radiación en una dimensión, en estado estacionario (no depende del tiempo) y en equilibrio termodinámico (el gas está a una temperatura termodinámica T y existe un proceso estable entre el gas y la radiación) que entra a un volumen aislado (en términos termodinámicos) por el área YZ y sale por un área similar YZ después de una longitud X.

El lado izquierdo de la expresión (4) sólo depende de la variable I mientras que el lado derecho solamente depende de la variable x (suponiendo en el caso más simple que el coeficiente de absorción no depende de la distancia).

Por lo tanto, utilizando el vocabulario matemático, la expresión (4) nos muestra dos ecuaciones diferenciales que son iguales, pero si son iguales, entonces, cada una puede ser igual a una constante (por ejemplo 1) y se pueden integrar de forma independiente

$$\int_{I_0}^{I_f} \frac{1}{I} dI \tag{5}$$

$$-\int_0^L \kappa dx \tag{6}$$

Llevando a cabo las integrales (5) y (6) se tienen:

$$\int_{I_0}^{I_f} \frac{1}{I} dI = \ln(I_f) - \ln(I_0) \tag{7}$$

$$\int_0^L -\kappa dx = -\kappa L \tag{8}$$

Pero la suma algebraica de logaritmos naturales es igual al logaritmo natural del cociente, por lo tanto el lado derecho de la expresión (7) es:

$$\ln\left(\frac{I_f}{I_0}\right) \tag{9}$$

Igualando la expresión (9) con el lado derecho de la expresión (8), nos queda:

$$\ln\left(\frac{I_f}{I_0}\right) = -\kappa L \tag{10}$$

Pero no es fácil trabajar matemáticamente con la función logaritmo natural. Hacemos el truco matemático de multiplicar ambos lados por la función inversa del logaritmo natural, la cual es la función exponencial. Paso por paso, tenemos:

$$e^{\ln\left(\frac{I_f}{I_0}\right)} = e^{-\mathrm{K}L} \qquad (11)$$

Simplificando la expresión (11) y multiplicando ambos lados por I_0, finalmente la intensidad ó brillo final Es igual a la intensidad original multiplicada por un Factor que decae exponencialmente con la distancia:

$$I_f = I_0 e^{-\mathrm{K}L} \qquad (12)$$

La expresión (12) a su vez la podemos analizar en tres casos dependiendo del valor de κL:

1) $\boldsymbol{\kappa L = 0}$. Se tiene el caso de **¡ cero absorción !**
$\boldsymbol{I_f = I_0}$ se dice que el **medio** por donde viaja la radiación **es completamente transparente**.

2) $\boldsymbol{\kappa L \gg 1}$. Se tiene el caso de **¡ total absorción !**
$\boldsymbol{I_f = 0}$ es decir, no sale nada de radiación, se dice que el **medio es ópticamente grueso**.

3) $\boldsymbol{\kappa L \ll 1}$. Se tiene el caso de **¡ absorción parcial !**
$\boldsymbol{I_f = I_0(1 - \kappa L)}$, se dice que **el medio es ópticamente delgado**.

2) Considérese a la variable τ igual a la integral del coeficiente de absorción a lo largo de una distancia desde x=0 hasta x=L

$$\tau = \int_0^L \kappa dx \qquad (13)$$

τ se le conoce en astronomía como espesor óptico, y la expresión (12) se puede escribir:

$$I_f = I_0 e^{-\tau} \qquad (14)$$

Los tres casos de trasferencia de energía en términos del espesor óptico son:

1) $\boldsymbol{\tau = 0}$, cero absorción, **medio transparente.**

2) $\tau \gg \mathbf{1}$, total absorción, **medio ópticamente grueso.**

3) $\tau \ll \mathbf{1}$, absorción parcial, **medio ópticamente delgado.**

Ejemplo del caso **1), medio ópticamente transparente**: el medio interplanetario, la luz del sol viaja desde el sol hacia la Tierra sin ser absorbida (a primera aproximación)

Ejemplo del caso **2), medio ópticamente grueso:** a) el gas del interior del sol. Desde la Tierra sólo se recibe la radiación de la pequeña cáscara de la atmosfera del Sol. No podemos observar las capas interiores del Sol, o en general de ninguna estrella, b) las atmósferas de Venus, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno: no podemos observar sus capas interiores.

Ejemplo del caso **3), medio ópticamente delgado** **:** la atmósfera de Marte