Luminosidad, Brillantez, Densidad de Flujo

Dr. José Antonio García Barreto
Investigador Titular B
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México

Material didáctico para utilizarse en el curso ***Astrofísica General*** a nivel licenciatura para estudiantes de física ofrecido en la Facultad de Ciencias, UNAM, Abril 2020

1) La luminosidad (en astronomía) o la potencia (en física), *definición de trabajo en este curso*, es la cantidad de energía por unidad de tiempo que emite un objeto, con unidades en el sistema cgs en astronomía: ergs/seg; en el sistema mks en física: watts que son joules/seg.

$$dL = \mathcal{B}\, d\upsilon\, dA\, d\Omega \qquad (1)$$

donde: dL es la diferencial de luminosidad

$\mathcal{B}$ es el brillo por unidad de ángulo sólido

$d\upsilon$ es la diferencial de la frecuencia de la radiación E&M

dA es la diferencial de área

$d\Omega$ es la diferencial de ángulo sólido

Integrando los dos lados de la expresión 1, se tiene:

$$\int_0^L dL = \int \int \int \mathcal{B}\ d\Omega d\upsilon dA \qquad (2)$$

$$L = \int \int \int \mathcal{B}\ d\Omega d\upsilon dA \qquad (3)$$

En términos de unidades, la expresión 1 se puede escribir:

$$\frac{erg}{seg} = \ \mathcal{B}\ \ Hertz\ cm^2\ esterorradianes \quad (4)$$

donde Hertz son número de ondas por segundo (Hz), y esterorradianes son radianes por radianes (rad^2)

2) Primero, la expresión para $\mathcal{B}$ la podemos escribir:

$$\mathcal{B} = \frac{dL}{d\upsilon \, d\Omega \, dA} \qquad (5)$$

Escribiendo las unidades del lado derecho de la expresión 3:

$$[\mathcal{B}] = \frac{erg/_{seg}}{Hz \, rad^2 \, cm^2} \qquad (6)$$

Segundo la expresión matemática del brillo (emisión de $\mathcal{B}$ radiación E&M a través de un ángulo sólido Ω) de un objeto es:

$$B = \int \mathcal{B} \; d\Omega \qquad (7)$$

Fue el gran físico de apellido **Planck** el que estudió el **brillo de un objeto** en un intervalo de frecuencia de la radiación que emana a través de un área y la denominó **B**.

A la expresión matemática de **B(υ,T)** se le conoce como

? ***Ley de Radiación de Planck***

$$B(\quad, T) = \frac{2h\upsilon^3}{c^2}\frac{1}{\left(e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1\right)} \qquad (8)$$

donde: $h\upsilon$ es la energía de un fotón (radiación E&M) acuñada por Planck y Einstein, y

kT es la energía térmica de un gas ideal a una temperatura T (estudios de Boltzmann)

Dependiendo del valor del cociente entre las energías se tienen dos casos importantes en Astronomía para la Ley de Radiación de Planck:

1. cuando $\frac{h\upsilon}{\kappa T} \ll 1$ se tiene el Régimen conocido como Rayleigh – Jeans,

2. cuando $\frac{h\upsilon}{\kappa T} \gg 1$ se tiene el Régimen conocido como Wien

Si analizamos las unidades de la función $B(\ ,T)$ nos dá:

$$[B(\ ,T)] = \frac{ergs}{cm^2} \qquad (9)$$

Estas unidades ciertamente no coinciden con las unidades En la expresión (6) y la integral en la expresión (7). Pero la realidad es que **sí son las mismas**. El **truco invisible** es multiplicar y dividir la expresión (9) por unidad de segundo.

$$[B(\ ,T)] = \frac{erg \quad seg}{cm^2 \quad seg} \qquad (10)$$

Podemos reagrupar las unidades dentro de la elipse color violeta y reconocer que la unidad dentro del círculo de color verde en el numerador se puede escribir el denominador:

$$[B(\ ,T)] = \frac{{}^{erg}/_{seg}}{cm^2 \frac{1}{seg}} \tag{11}$$

Por último reconocemos que la unidad ${}^{1}/_{seg}$ es igual a la unidad Hertz con su acrónimo Hz. Finalmente:

$$[B(\ ,T)] = \frac{{}^{erg}/_{seg}}{cm^2 Hz} \tag{12}$$

3) La definición de densidad de flujo, $\boldsymbol{S_\upsilon}$, por unidad de frecuencia, υ, de una estrella observada por un telescopio óptico es similar a la expresión (7).

$$S_\upsilon = \int \mathcal{B}(\upsilon, \mathrm{T}) \quad d\Omega \qquad (13)$$

Aún más, $\mathcal{B}(\upsilon, \mathrm{T})$ no depende de las variables del ángulo sólido por donde emite la radiación hacia la tierra. Reescribiendo la expresión 7, tenemos:

$$S_\upsilon = \mathcal{B}(\upsilon, \mathrm{T}) \int d\Omega \qquad (14)$$

Para observación de radiación E&M del Sol, por un astrónomo en la Tierra, $\int d\Omega = \pi\,(rad)^2$ (15)

Las unidades de la <u>densidad de flujo por unidad de frecuencia, υ,</u> son:

$$[S_{\upsilon}] = \frac{{}^{erg}/_{seg}}{cm^2\ Hz} \qquad (16)$$

4) La densidad de flujo de una estrella que se recibe de una radiación E&M con frecuencia υ es :

$$F_{\upsilon} = \upsilon S_{\upsilon} \qquad (17)$$

O si es en un intervalo de frecuencias $\Delta\upsilon$,

$$F_{\Delta\upsilon} = \Delta\upsilon S_{\upsilon} \qquad (18)$$

Las unidades de F_{υ} o $F_{\Delta\upsilon}$ son:

$$[F_{\upsilon}] = \frac{erg/seg}{cm^2} \qquad (19)$$

5) El flujo de energía (radiación electromagnética a saliendo a través de un ángulo sólido (visto por un observador en la Tierra) es:

$$\mathcal{F} = \int \int_0^{\infty} \frac{2h\upsilon^3}{c^2} \frac{1}{\left(e^{h\upsilon/\kappa T}-1\right)} d\upsilon d\Omega \qquad (20)$$

Para encontrar la solución algebraica para el flujo, $\mathscr{F}$, toman tres consideraciones:

a) la primera es que la integral sobre todas las frecuencias del espectro E&M es un concepto astrofísico. Es decir, en teoría se contempla integrar la emisión de radiación según la Ley de Planck a todas las frecuencias.

Pero observacionalmente eso requeriría muchos telescopios en Tierra, a) ópticos, b) que reciban la radiación infrarroja, c) radio telescopios que reciban ondas con longitudes de onda de metros hasta milímetros y decimas de milímetros, y muchos telescopios en el espacio que reciban i) radiación UV, ii) Rayos X, iii) radiación infrarroja lejana,

b) la segunda es que la Ley de Radiación de Planck ***no depende del ángulo sólido*** por donde fluye la energía, por lo tanto, la integral sobre el ángulo sólido es independiente de la integral sobre las frecuencias.

c) Para la integral sobre las frecuencias se hace un cambio de variable, por ejemplo,

$$x = \frac{h\upsilon}{\kappa T}, \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{\kappa T}{h} x, \qquad d\upsilon = \frac{\kappa T}{h} dx \tag{21}$$

$$\mathcal{F} = \int d\Omega \int_0^\infty \frac{2h}{c^2} \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^3 \frac{x^3}{(e^x - 1)} \frac{\kappa T}{h} dx \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \pi \frac{2\kappa^4 \mathrm{T}^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx \qquad (23)$$

donde π (rad^2) es el ángulo sólido de una estrella observada desde la Tierra (sólo el hemisferio en la línea de visión [ver nota de clase sobreél tema ángulo sólido en astronomía])

La integral dá un valor numérico (uds los alumnos lo determinarán en un enunciado de una próxima tarea)

Finalmente, el flujo de energía a través de un ángulo sólido, por unidad de área es:

$$\boxed{\mathcal{F} = \sigma T^4} \tag{24}$$

donde **σ** es la constante de Stefan-Boltzman, y **T**, es la temperatura "efectiva" o superficial de la estrella

Las unidades de $\mathcal{F}$ son:

$$[\mathcal{F}] = \frac{erg/_{seg}}{cm^2} \tag{25}$$

Para una estrella que emite radiación E&M a una temperatura superficial T según la Ley de Planck,

¡ el ***flujo de energía*** a través de un ángulo sólido de una estrella observado desde la Tierra por unidad de área ***depende solamente*** de ***su temperatura superficial elevada a la cuarta potencia*** !

Pero, no se tiene un termómetro para medir la temperatura superficial del Sol o de cualquier otra estrella. Entonces ¿qué se hace?

Se estima T del flujo intrínseco de la estrella, el cuál se puede estimar del flujo que se recibe en la Tierra (tema que se expondrá en una próxima clase).

$$\mathrm{T} = \left(\frac{\mathcal{F}}{\sigma}\right)^{1/4} \tag{26}$$

Por ejemplo, para el Sol:

$$\mathrm{T}_{\odot} = \left(\frac{\mathcal{F}_{\odot}}{\sigma}\right)^{1/4} \tag{27}$$

6) La luminosidad de una estrella, es el flujo de energía que emana a través de un ángulo sólido de una esfera por el área que encierra el volumen “angular” de la esfera.

Para el Sol, su luminosidad instrínseca es:

$$\boxed{L_\odot = 4\pi {R_\odot}^2 \mathcal{F}_\odot} \tag{28}$$

En este momento del curso, solamente conocemos el radio del Sol. En alguna próxima clase veremos como estimar el flujo intrínseco del Sol y con eso podremos estimar su luminosidad.

Para cualquier otra estrella, la luminosidad es:

$$L_* = 4\pi R_*{}^2 \mathcal{F}_* \qquad (29)$$

Esta es una expresión muy importante para un astrofísico pero necesita estimar observacionalmente el flujo intrínseco y el radio de la estrella.

La determinación observacional de esas dos conceptos son la motivación para construir telescopios ópticos de mayor diámetro para detectar flujos más débiles, y desarrollar interferómetros ópticos con varios telescopios observando la misma estrella, para estimar el diámetro de la estrella.

Ejemplos:

a) tres telescopios ópticos de aproximadamente 30m de diámetro que se construirán en los próximos 5 años.
b) El interferometro conocido por sus siglas en inglés CHARA, en Mount Wilson Californa, EEUU, operado por la Universidad Estatal de Georgia, EEUU (con 5 telescopios de 1m de diámetro cada uno)